**Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України**

**Головне управління освіти і науки Черкаської обласної державної адміністрації**

**Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників**

**О.М. Козлова, О.С. Сорокіна, С.О. Чамата**

# СТЕРЕОМЕТРІЯ
# в старшій школі

**навчально-методичний посібник**

**2012 рік**

**Стереометрія в старшій школі. – Черкаси: ОІПОПП, 2012. – 72 с.**

**Автори:**

Козлова О.М., методист Черкаського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних працівників;

Сорокіна О.С., учитель математики вищої кваліфікаційної категорії, старший вчитель Золотоніської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 5 Золотоніської міської ради;

Чамата С.О., учитель математики вищої кваліфікаційної категорії, вчитель-методист Золотоніської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 5 Золотоніської міської ради.

У пропонованому посібнику для 10–11 класів представлено: програму організації факультативного заняття для учнів 10-11 класів «Стереометрія у старшій школі», розраховану на 35 годин (1 година на тиждень); орієнтовне календарне планування; методичні рекомендації для проведення занять; зразки оформлення та етапи розв'язання деяких типових задач; запропоновані учням задачі для самостійного розв'язання.

Навчально-методичний посібник адресований учням 10 – 11 класів, вчителям математики для організації факультативних занять та для роботи в класах рівня стандарту та академічного рівня.

**Рецензенти:**

**Коломієць О.М.,** доцент Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького.

**Ходоровська С.І.,** учитель математики Кам'янської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 1 Кам'янської районної ради.

Рекомендовано до друку вченою радою ЧОІПОПП. Протокол № 2 від 30.05.2012 р.

*Зміст*

## Пояснювальна записка

Геометричні знання в усі часи складали серцевину повноцінної загальної освіти.

Однією з основних форм позакласної роботи з геометрії у 10-11 класах є *факультативні заняття. Вони доповнюють роботу на уроках і дають* можливість задовольнити інтереси та запити учнів. На факультативних заняттях учні розширюють і поглиблюють набуті знання, навчаються працювати над розв'язанням проблем, читати додаткову літературу.

Основними завданнями навчання геометрії є:

1) розвиток образного, просторового мислення;
2) розвиток логічного мислення;
3) формування розуміння відношень між геометричними об`єктами та об`єктами реального світу, вміння застосовувати знання з геометрії до розв’язування задач.

Загальна мета навчання стереометрії конкретизується у змісті навчання:

- знання різних видів (понять, фактів, методів, теорій);
- засобів діяльності (навчальних, пізнавальних).

Зміст навчання стереометрії передбачає:

- формування просторового мислення;
- розвиток геометричної інтуїції щодо образів, властивостей, методів;
- розвиток геометричних уявлень та абстрактного мислення;
- формування вмінь аналізувати та синтезувати геометричні образи;
- формування умінь та навичок геометричних побудов, зображень;
- розвиток метричних умінь;
- опанування символічної мови.

Одне з найважливіших завдань навчання стереометрії - формування вмінь розв`язувати задачі.

Стереометричні задачі мають свої специфічні особливості порівняно з планіметричними.

Перша і найголовніша з них пов`язана з побудовою рисунка до задачі. Рисунок до задачі - графічна модель геометричної конструкції. Якість цієї моделі визначає і якість розв`язання. Неправильна модель може призвести до неправильного розв`язання.

Для успішного формування вмінь розв`язувати стереометричні задачі перш за все необхідно навчити учнів правильно зображати просторові фігури, «читати зображення».

У посібнику представлено такий тип задач, який зводиться до теоретичного обґрунтування можливості виконання побудови (побудова перпендикуляра на задану бічну грань; побудова основи висоти піраміди, якщо: а) всі бічні ребра рівні між собою; б) усі двогранні кути при основі рівні між собою; в) побудова лінійного кута двогранного кута і т.д. )

У пропонованому посібнику для 10–11 класів представлено:

- програму організації факультативного заняття для учнів 10-11 класів «Стереометрія у старшій школі», розраховану на 35 годин (1 година на тиждень);
- орієнтовне календарне планування;
- методичні рекомендації для проведення занять;
- зразки оформлення та етапи розв'язання деяких типових задач;
- запропоновані учням задачі для самостійного розв'язання.

Програму розбито на два розділи – «Прямі і площини у просторі» і «Многогранники та тіла обертання».

Вони містять теми :

- розділ 1 – «Паралельність прямих і площин», «Перпендикуляр і похила до площини», «Відстань від точки до площини та між паралельними площинами», «Точка, що проектується у вершину многокутника», «Поділ відрізка у заданому відношенню», «Точка, що проектується у вершину многокутника», «Відстань від точки до прямої», «Точка, що рівновіддалена від сторін многокутника», «Перпендикулярність площин» , «Двогранні кути, кут між площинами», «Площина ортогональної проекції многокутника».

- розділ 2 - «Призми» , «Піраміди» , «Циліндри» , «Конуси» , «Комбінації геометричних фігур».

Цей посібник не розрахований на просте читання матеріалу. Усі завдання скомпоновано в групи так, що вони мають однаковий метод розв'язання або близькі за змістом умови. Наведено зразки оформлення розв'язування задач майже до кожної теми розділів. Запропоновані розв`язки задач та їх оформлення слід розглядати як не єдино можливі. Вони подані, як правило, стисло, висвітлюють головні моменти розв`язку. Завдання для домашньої роботи помічено *. До кожної задачі є відповіді.

Навчально-методичний посібник адресований учням 10 – 11 класів, вчителям математики для організації факультативних занять та для роботи в класах рівня стандарту та академічного рівня.

Програма факультативного курсу «Стереометрія в старшій школі»

| № | Тема заняття | Кіль-кість годин | Основні вимоги до математичної підготовки учнів |
|---|---|---|---|
| I | **ПРЯМІ І ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ** | **14** | |
| 1 | ***Паралельність прямих і площин у просторі*** | 3 | Учні мають *знати :*<br>- означення паралельних і мимобіжних прямих, паралельних прямої та площини, паралельних площин;<br>- властивості й ознаки паралельності прямих і площин;<br>*вміти :*<br>- зображати паралельні прямі та площини;<br>- застосовувати теорію до розв'язування задач на доведення. |
| 1.1 | Паралельність прямих | | |
| 1.2 | Паралельність прямої і площини | | |
| 1.3 | Паралельність площин | | |
| 2 | ***Перпендикулярність прямих, перпендикулярність прямої і площини у просторі*** | ***8*** | Учні мають<br>*знати :*<br>- означення перпендикулярних прямих у просторі;<br>- ознаку перпендикулярності прямих у просторі;<br>- означення перпендикуляра, похилої та її проекції у просторі;<br>- означення, ознаку перпендикулярності прямої до площини;<br>- властивості прямих, перпендикулярних до площини та відповідні ознаки;<br>- означення відстані від точки до прямої у просторі, від точки до площини, від прямої до паралельної їй площини, |
| 2.1 | Перпендикуляр і похила до площини, проекція похилої. | | |
| 2.2 | Точка, що проектується у вершину многокутника | | |
| 2.3 | Відстань від точки до площини та відстань між паралельними площинами | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.4 | Поділ відрізка у заданому відношенні | | між паралельними площинами;<br>- теорема про три перпендикуляри; |
| 2.5 | Точка, що рівновіддалена від вершин многокутника | | *вміти :*<br>- зображати та знаходити перпендикулярні прямі і площини, перпендикуляр і похилу;<br>- застосовувати вивчені властивості й ознаки до розв'язування задач;<br>- застосовувати теорему про три перпендикуляри до розв'язування задач;<br>- розв'язувати задачі, що передбачають застосування понять відстаней у просторі. |
| 2.6 | Відстань від точки до прямої. Точка проектується у вершину трикутника | | |
| 2.7 | Точка проектується на сторону многокутника | | |
| 2.8 | Точка, що рівновіддалена від сторін многокутника | | |
| 3 | ***Перпендикулярність площин*** | ***3*** | Учні повинні *знати:*<br>- означення перпендикулярності площин;<br>- властивості перпендикулярних площин та відповідні ознаки;<br>- означення кута між прямими у просторі, кута між прямою і площиною, кута між мимобіжними прямими, двогранного кута, кута між площинами;<br>- поняття ортогонального проектування, ортогональної проекції многокутника;<br>- теорема про площу ортогональної проекції многокутника;<br>*вміти:*<br>- зображати перпендикулярні площини, двогранні кути та знаходити на рисунках невідомі величини згідно з умовою задач;<br>- застосовувати означення та |
| 3.1 | Перпендикулярність площин | | |
| 3.2 | Двогранні кути. Кут між площинами | | |
| 3.3 | Площа ортогональної проекції многокутника | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | ознаку перпендикулярних площин до розв'язування задач;<br>- розв'язувати задачі із застосуванням теоретичного матеріалу. |
| II | **МНОГОГРАННИКИ І ТІЛА ОБЕРТАННЯ** | **21** | Учні мають *знати :*<br>- означення многогранників та їхні властивості;<br>- формули для обчислення об'ємів призм та пірамід;<br>- формули площ бічної та повної поверхонь призм і пірамід;<br>*вміти:*<br>- розв'язувати задачі на знаходження об'ємів, площ поверхонь многогранників, використовуючи теоретичний матеріал. |
| 1 | ***Призми*** | ***4*** | |
| 1.1 | Трикутні призми | | |
| 1.2 | Чотирикутні призми | | |
| 2 | ***Піраміда*** | ***7*** | |
| 2.1 | Піраміди, в яких задано плоский кут при одній з вершин | | |
| 2.2 | Піраміди, в яких бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами | | |
| 2.3 | Піраміди, в яких усі двогранні кути при основі рівні між собою | | |
| 2.4 | Піраміди, в яких дві бічні грані перпендикулярні до площини основи | | |
| 2.5 | Трикутні піраміди, в яких одна бічна грань перпендикулярна до площини основи | | |
| 2.6 | Піраміди, в яких задана відстань між деякими двома їх точками або відстань від деякої точки до бічного ребра, апофеми | | |

<table>
<tr><td>2.7</td><td>Піраміди, в яких задано перпендикуляр, проведений з деякої точки до бічної грані</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Тіла обертання</td><td>3</td><td rowspan="10">Учні повинні знати:<br>- основні властивості циліндра і конуса;<br>- формули для знаходження площі повної та бічної поверхонь циліндра, конуса;<br>- формули для знаходження об’єму циліндра (конуса);<br>- поняття кулі, сфери, центра кулі, радіуса кулі (сфери), хорди, діаметра, діаметрально-протилежних точок;<br>- поняття циліндра, описаного навколо призми, циліндра вписаного в призми, конуса описаного навколо пірамід, конуса вписаного в піраміди, кулі та сфери описаного навколо призм, пірамід, конусів, кулі, вписані в піраміди, конуси;<br>вміти:<br>- розв’язувати задачі на знаходження невідомих елементів циліндра, конуса, культсфери.</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Циліндри</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Конуси</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Комбінації геометричних фігур</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Циліндри, описані навколо призм</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Циліндри, вписані в призми</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Конуси, описані навколо пірамід</td><td></td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Конуси, вписані в піраміди</td><td></td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>Кулі та сфери, описані навколо призм</td><td></td></tr>
<tr><td>4.6</td><td>Кулі, описані навколо пірамід або конусів</td><td></td></tr>
<tr><td>4.7</td><td>Кулі, вписані в піраміди або конуси</td><td></td></tr>
</table>

**Орієнтовне календарне планування факультативного курсу «Стереометрія в старшій школі»**

| № | Тема заняття | Кількість годин |
|---|---|---|
| I | **ПРЯМІ І ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ** | **14** |
| 1 | ***Паралельність прямих і площин у просторі*** | 3 |
| 1.1 | Паралельність прямих | 1 |
| 1.2 | Паралельність прямої і площини | 1 |
| 1.3 | Паралельність площин | 1 |
| 2 | ***Перпендикулярність прямих, перпендикулярність прямої і площини у просторі*** | ***8*** |
| 2.1 | Перпендикуляр і похила до площини, проекція похилої. | 1 |
| 2.2 | Точка, що проектується у вершину многокутника | 1 |
| 2.3 | Відстань від точки до площини та відстань між паралельними площинами | 1 |
| 2.4 | Поділ відрізка у заданому відношенні | 1 |
| 2.5 | Точка, що рівновіддалена від вершин многокутника | 1 |
| 2.6 | Відстань від точки до прямої. Точка проектується у вершину трикутника | 1 |
| 2.7 | Точка проектується на сторону многокутника | 1 |
| 2.8 | Точка, що рівновіддалена від сторін многокутника | 1 |
| 3 | ***Перпендикулярність площин*** | ***3*** |
| 3.1 | Перпендикулярність площин | 1 |
| 3.2 | Двогранні кути. Кут між площинами | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 3.3 | Площа ортогональної проекції многокутника | 1 |
| II | **МНОГОГРАННИКИ І ТІЛА ОБЕРТАННЯ** | **21** |
| 1 | ***Призми*** | ***4*** |
| 1.1 | Трикутні призми | 2 |
| 1.2 | Чотирикутні призми | 2 |
| 2 | ***Піраміда*** | ***7*** |
| 2.1 | Піраміди, в яких задано плоский кут при одній з вершин | 1 |
| 2.2 | Піраміди, в яких бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами | 1 |
| 2.3 | Піраміди, в яких усі двогранні кути при основі рівні між собою | 1 |
| 2.4 | Піраміди, в яких дві бічні грані перпендикулярні до площини основи | 1 |
| 2.5 | Трикутні піраміди, в яких одна бічна грань перпендикулярна до площини основи | 1 |
| 2.6 | Піраміди, в яких задана відстань між деякими двома їх точками або відстань від деякої точки до бічного ребра, апофеми | 1 |
| 2.7 | Піраміди, в яких задано перпендикуляр, проведений з деякої точки до бічної грані | 1 |
| 3 | ***Тіла обертання*** | ***3*** |
| 3.1 | Циліндри | 1 |
| 3.2 | Конуси | 2 |
| 4 | ***Комбінації геометричних фігур*** | ***7*** |
| 4.1 | Циліндри, описані навколо призм | 1 |
| 4.2 | Циліндри, вписані в призми | 1 |
| 4.3 | Конуси, описані навколо пірамід | 1 |
| 4.4 | Конуси, вписані в піраміди | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 4.5 | Кулі та сфери, описані навколо призм | 1 |
| 4.6 | Кулі, описані навколо пірамід або конусів | 1 |
| 4.7 | Кулі, вписані в піраміди або конуси | 1 |

# І. Прямі і площини у просторі

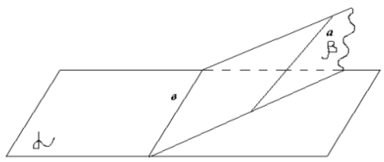
## *1. Паралельність прямих і площин*

№1

Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинається з цією площиною, то пряма перетину площин паралельна даній прямій. Довести це.

Нехай пряма *a* паралельна площині α, а площина β, що містить *a*, перетинається з α по прямій b. Прямі *a* і b належать одній площині β. Припустимо, що вони перетинаються у деякій точці X. Тоді X – спільна для a і α. А це суперечить умові *a*‖α.

Отже, зроблене припущення невірне. Оскільки прямі *a* і b не перетинаються і лежать в одній площині, то *a*‖α. Твердження задачі доведено.



Задача №2

Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площини, що перетинаються, то пряма їх перетину паралельна кожній з даних прямих. Довести це.

Задача №3

Вершини трикутника розміщені по один бік від площини і рівновіддалені від неї. Довести, що ця площина паралельна площині трикутника.

Задача №4

Якщо дві площини паралельні, то кожна пряма першої лощини паралельна другій площині. Довести це.

Задача №5*

Якщо площина перетинає одну з двох паралельних прямих під деяким кутом, то вона перетинає і другу пряму під тим же кутом. Довести це.

## *2 Перпендикулярність прямих, перпендикулярність прямої і площини у просторі*

### *2.1 Перпендикуляр і похила до площини, проекція похилої*

Задача №6

З точки, віддаленої від площини на 24 см, проведено дві похилі, кут між якими $90^{o}$. Проекції цих похилих на площину дорівнюють 18 і 32 см. Обчислити відстань між основами похилих.

Відповідь: 50 см.

Задача №7

З точки до площини проведено дві похилі довжиною 25 і 30 см. Різниця між проекціями цих похилих дорівнює 11 см. Обчислити відстань від точки до площини.

Відповідь: 24 см.

Задача №8

З точки до площини проведено дві похилі, різниця між якими дорівнює 5 см. Проекції цих похилих дорівнюють 18 і 7 см. Обчислити відстань від даної точки до площини.

Відповідь: 24 см.

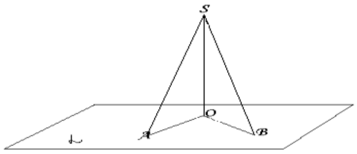
Задача №9*

З деякої точки простору проведено до площини дві похилі, проекції яких дорівнюють 8 і 20 см. Більша з похилих дорівнює 25 см. Обчислити довжину меншої похилої.

Відповідь: 17 см.

Задача №10

З точки до площини проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює $4\sqrt{5}$ см, а довжина її проекції 8 см. Кут між проекціями похилих дорівнює $60^{o}$, а довжина відрізка, що сполучає основи похилих, дорівнює 7 см. Обчислити довжину другої похилої.



Відповідь: $\sqrt{41}$ см або 5 см.

*2.2 Точка, що проектується у вершину многокутника*

Задача №11

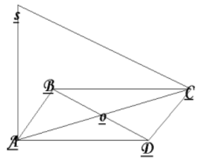
З точки до площини квадрата, сторона якого дорівнює 12 см, проведено перпендикуляр довжиною $\sqrt{112}$ см. Основа цього перпендикуляра – вершина квадрата. Обчислити відстань від даної точки до інших вершин квадрата.

Нехай SA – перпендикуляр, опущений з даної точки S на площину α ромба ABCD, у якому A – вершина гострого кута, AB=5 см, BD=6 см – менша діагональ, M – точка перетину діагоналей, SC=17 см.

Оскільки ABCD – ромб, то ∠AMD=90°;

MD= $\frac{1}{2}$ BD= 3 см; AM= $\sqrt{AD^2 - MD^2}$ = 4 см.

І тому AC=2AM=8 см.



Задача №12

З точки до площини прямокутника зі сторонами 9 і 12 см, проведено перпендикуляр, основою якого є одна з вершин прямокутника. Відстань від протилежної вершини прямокутника до цієї точки дорівнює 39 см. Обчислити відстань від даної точки до площини прямокутника.

Відповідь: 36 см.

Задача №13

З точки до площини рівнобедреної трапеції, більша основа якої дорівнює 13 см, висота 12 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута, проведено перпендикуляр. Основа перпендикуляра – вершина гострого кута трапеції. Відстань від даної точки до вершини протилежного тупого кута – $4\sqrt{22}$ см. Обчислити відстань від точки до площини трапеції.

Відповідь: 12 см.

Задача №14

З точки до площини прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює 13 см, висота 12 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута, проведено перпендикуляр довжиною $8\sqrt{3}$ см. Основа перпендикуляра - вершина тупого кута трапеції. Обчислити відстань від даної точки до вершини протилежного прямого кута трапеції.

Відповідь: 20 см.

Задача №15*

З точки до площини прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює 24 см, бічна сторона 25 см, а більша діагональ є бісектрисою прямого кута, проведено перпендикуляр довжиною $7\sqrt{15}$ см. Основа перпендикуляра - вершина тупого кута трапеції. Обчислити відстань від даної точки до вершини протилежного прямого кута.

Відповідь: 40 см.

## *2.3 Відстань від точки до площини та між паралельними площинами*

№16

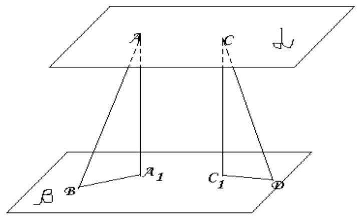
Два відрізки впираються своїми кінцями у дві паралельні площини. Довжини відрізків відносяться як 15:13, а їх проекції на одну з площин відповідно дорівнюють 18 і 10 см. Обчислити відстань між площинами.

Нехай α і β – задані паралельні площини, а AB і CD – задані відрізки (A, C ∈ α; B, D ∈ β).

Позначимо через $A_1$ і $C_1$ проекції відповідно точок A і C на β. Нехай $A_1B$ = 18 см та $C_1D$ = 10 см (оскільки α||β, то проекції відрізків AB і CD на α мають ті ж самі довжини). Тоді $AA_1 = CC_1$ – шукана відстань між площинами α і β.

За умовою задачі AB:CD = 15:13 (враховуємо, що довшому відрізку відповідає довша проекція). Отже, AB=$15x$ см, CD= $13x$ см, де $x$>0. Позначивши $AA_1 = CC_1$ через $y$, з прямокутних трикутників $AA_1B$ та $CC_1D$ (оскільки $AA_1 \perp \beta$ і $BB_1 \perp \beta$, то $\angle AA_1B = \angle CC_1D = 90^o$) за теоремою Піфагора матимемо:

$\{225x^2 = y^2 + 324.169x^2 = y^2 + 100.$ $\{x^2 = 4.y^2 = 169x^2 - 100;$ $y^2$=576; y=24 см.



Задача №17

Два відрізки впираються своїми кінцями у дві паралельні площини. Довжини їх проекцій на площині відносяться як 9:5. Обчислити відстань між площинами, якщо довжини відрізків дорівнюють 30 і 26 см.

Відповідь: 24 см.

Задача №18

Два відрізки, сума яких дорівнює 64 см, впираються своїми кінцями у дві паралельні площини. Їх проекції на одну з цих площин дорівнюють 20 і 28 см. Обчислити довжини відрізків та відстань між площинами.

Відповідь: 29 см, 35 см, 21 см.

Задача №19

Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 15 см. Відрізок, довжина якого 17 см, впирається своїми кінцями у ці площини. Обчислити проекції відрізка на кожну з даних площин.

Відповідь: 8 см.

Задача №20

Два відрізки впираються своїми кінцями у дві паралельні площини. Проекції цих відрізків на дані площини дорівнюють 10 і 32 см, а довжина першого відрізка дорівнює 26 см. Обчислити довжину другого відрізка.

Відповідь: 40 см.

Задача №21*

Два відрізки впираються своїми кінцями у дві паралельні площини. Різниця цих відрізків дорівнює 17 см, а їх проекції на одну з площин дорівнюють 9 і 42 см. Обчислити відстань між площинами. Відповідь: 40 см.

## *2.4 Поділ відрізка у заданому відношенні*

***Відстань від середини відрізка до площини, що не перетинає його, дорівнює півсумі відстаней від кінців відрізка до цієї площини***

***Відстань від середини відрізка до площини, що перетинає його, дорівнює піврізниці відстаней від кінців відрізка до цієї площини***

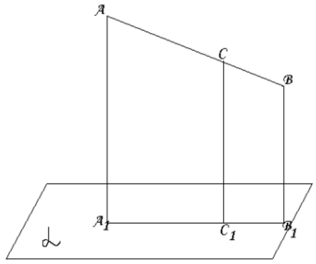
Задача №22

Довести, що відстань від середини відрізка до площини, що не перетинає його, дорівнює півсумі відстаней від кінців відрізка до цієї площини.

Нехай A, B – кінці заданого відрізка, C – його середня точка, $A_1$, $B_1$, $C_1$, - ортогональні проекції на задану площину α точок A, B, C відповідно. Тоді $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ – відстані від точок A, B, C до α. Необхідно довести рівність:

$CC_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$.

Прямі $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, перпендикулярні до однієї і тієї ж площини α, паралельні між собою. Оскільки вони перетинають одну і ту ж пряму AB, то належать одній площині. Отже, точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ належать одній прямій – лінії перетину вказаної площини з площиною α. Точки A, B, C за умовою задачі лежать по одну сторону від прямої $A_1B_1$. Тоді чотирикутник $AA_1B_1B$ – трапеція з основами $AA_1$ і $BB_1$, у якій $CC_1$ – середня лінія ($CC_1$ ділить пополам бічну сторону AB і паралельна до основ трапеції). Необхідна рівність випливає з формули довжини середньої лінії трапеції. Твердження доведено.



$\frac{an+bm}{m+n}$ ***– формула поділу відрізка у заданому відношенні***

Задача №23

Кінці відрізка, що не перетинає площину, віддалені від неї на 12 і 4 см. Обчислити відстань від точки відрізка від точки відрізка, що ділить його у відношенні 5 : 3, рахуючи від першого кінця, до даної площини.

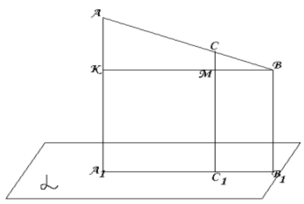
Нехай A, B – кінці заданого відрізка, $A_1$, $B_1$ – їх ортогональні проекції на задану площину α, $AA_1$ = 12 см, а $BB_1$ = 4 см. Нехай точка C ділить відрізок AB так, що AC : CB = 5 : 3, а $C_1$ – ортогональна проекція точки C на α. Необхідно знайти довжину відрізка $CC_1$.

Проектуючі прямі $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ належать одній площині. Проведемо у цій площині через точку B пряму, паралельну до $A_1B_1$. Нехай K і M – точки її перетину з прямими $AA_1$ і $CC_1$ відповідно. Тоді $KA_1=MC_1=BB_1=4$ см. $AK = AA_1 – KA_1$ = 8 см.

ΔCBM~ΔABK. Тому CM : CB = AK : AB. Звідки

CM=AK·(CB:AB)=8 · (3:8)=3 (см). Отже, $CC_1$ = CM + $MC_1$ = 7 см.

$CC_1 = \frac{an+bm}{m+n}$ - формула поділу відрізка у заданому відношенні.



Задача №24

Дві суміжні вершини паралелограма віддалені від площини, що не перетинає його, на 23 і 29 см. Точка перетину діагоналей паралелограма віддалена від площини на 25 см. Обчислити відстань від решти вершин паралелограма до цієї площини. Відповідь: 21 см, 27 см.

Задача №25

Вершини трикутника віддалені від площини, що не перетинає його, на відстані 25, 29 і 42 см. Обчислити відстань від точки перетину медіан трикутника до площини.

Відповідь: 32 см.

Задача №26

Кінці відрізка, що перетинає площину, віддалені від неї на 23 і 13 см. Обчислити відстань від середини відрізка до цієї площини.

Відповідь: 5 см.

Задача №27*

Кінці відрізка, довжина якого 30 см, віддалені від площини, яку він перетинає, на 3 і 15 см. Обчислити довжину проекції відрізка на цю площину.

Відповідь: 24 см.

## *2.5 Точка, що рівновіддалена від вершин многокутника*

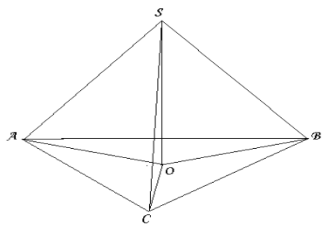
***Якщо точка рівновіддалена від вершин многокутника, то основою перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини многокутника, є центр кола, описаного навколо нього.***

Задача №28

Точка рівновіддалена від вершин трикутника. Довести, що основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини трикутника, є центром кола, описаного навколо нього.

Нехай S – задана точка, $\alpha$ – площина заданого трикутника ABC, $SA = SB = SC$, $SO \perp \alpha$, $O \in \alpha$.

Розглянемо трикутники SOA, SOB, SOC. Вони рівні, як прямокутні (оскільки $SO \perp \alpha$, то $\angle SOA = \angle SOB = \angle SOC = 90^o$), що мають спільний катет SO і рівні гіпотенузи SA, SB, SC. Тому рівними є їхні катети OA, OB, OC. Точка O, таким чином, рівновіддалена від вершин трикутника ABC, а, значить, є центром кола, описаного навколо нього. Твердження задачі доведено.




Задача №29

Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а його площа 48 см$^2$. Точка знаходиться на відстані 12 см від площини прямокутника і рівновіддалена від усіх його вершин. Обчислити відстані від цієї точки до вершин прямокутника.

Відповідь: 13 см.

Задача №30

У рівнобедреному трикутнику основа і проведена до неї висота відповідно дорівнюють 48 і 32 см. Точка лежить на відстані 60 см від площини трикутника і на однаковій відстані від його вершин. Обчислити відстань від цієї точки до вершин трикутника.

Відповідь: 65 см.

Задача №31

У прямокутному трикутнику перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16. Відстані від точки простору до вершин трикутника дорівнюють по 65 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини трикутника.

Відповідь: 60 см.

Задача №32*

Сторони прямокутника дорівнюють 18 і 24 см. Точка простору знаходиться на відстані 8 см від площини прямокутника і рівновіддалена від усіх його вершин. Обчислити відстань від цієї точки до вершин прямокутника.

Відповідь: 17 см.

## *2.6 Відстань від точки до прямої. Задана точка*

*<u>проектується у вершину трикутника</u>*

Задача №33

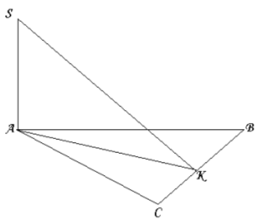
З точки до площини трикутника, сторони якого дорівнюють 13, 14 і 15 см, проведено перпендикуляр довжиною 16 см. Основою цього перпендикуляра є вершина кута, що лежить проти сторони завдовжки 14 см. Обчислити відстань від даної точки до цієї сторони.

Нехай S – задана точка, α – площина заданого трикутника ABC, SA перпендикулярна α, SA = 16 см, AB = 15 см, AC = 13 см, BC = 14 см.

Нехай AN – висота трикутника ABC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри SN перпендикулярно BC і SN, таким чином, SN - шукана відстань. Визначимо її з прямокутного трикутника SAN (оскільки SA перпендикулярна α, то $\angle SAN = 90^{o}$). Для цього попередньо знайдемо AN. З формули для площі трикутника AN = $\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$. Необхідну площу визначимо за формулою Герона:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6} = 84$ (см$^2$). Отже, AN = 12 см.

І тому SN = $\sqrt{SA^2 + AN^2}$ = 20 см.




Відповідь: 20 см.

Задача №34

З точки до площини трикутника, сторони якого дорівнюють 29, 25 і 6 см, проведено перпендикуляр з основою у вершині кута, протилежного до найменшої сторони трикутника. Відстань від даної точки до прямої, що містить цю сторону, дорівнює 25 см. Обчислити відстань від точки до площини трикутника.

Відповідь: 15 см.

Задача №35

З точки до площини правильного трикутника зі стороною $8\sqrt{3}$ см проведено перпендикуляр завдовжки 5 см. Основою перпендикуляра є одна з вершин трикутника. Обчислити відстань від точки до сторони трикутника, яка не містить основи перпендикуляра.

Відповідь: 13 см.

Задача №36

З точки до площини рівнобедреного трикутника, основа і бічна сторона якого відповідно дорівнюють 30 і 20 см, проведено перпендикуляр довжиною 15 см. Основа цього перпендикуляра співпадає з вершиною трикутника, протилежною до його основи. Обчислити відстань від цієї точки до основи трикутника.

Відповідь: 20 см.

Задача №37

З точки простору до площини прямокутного трикутника, гіпотенуза і катет якого відповідно дорівнюють 9 і 5 см, проведено перпендикуляр довжиною 12 см. Основа цього перпендикуляра – вершина гострого кута, прилеглого до даного катета. Обчислити відстань від даної точки до другого катета та до його кінців.

Відповідь: 13 см, 13 см, 15 см.

Задача №38*

З точки до площини прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 15 і 20 см, проведено перпендикуляр довжиною 16 см. Основою перпендикуляра є вершина прямого кута. Обчислити відстань від даної точки до гіпотенузи.

Відповідь: 20 см.

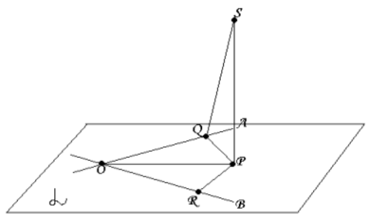
## *2.7 Точка проектується на сторону многокутника*

***Якщо з точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються, провести перпендикуляри до площини цих прямих, то основи перпендикулярів належать бісектрисам кутів, утворених цими прямими.***

Задача №39

З точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються, проведено перпендикуляри до площини цих прямих. Довести, що основи перпендикулярів належать бісектрисам кутів, утворених цими прямими.

Нехай $\alpha$-площина заданих прямих OA та OB, S – одна із заданих точок, SP, SQ, SR - перпендикуляри відповідно до площини $\alpha$ та прямих OA і OB, SQ = SR. Якщо точка P співпадає з точкою O, то твердження задачі, очевидно, справедливе . В противному випадку досить довести, що $\angle POQ = \angle POR$. За означенням перпендикулярності прямої і площини $\angle SPQ = \angle SPR = 90^0$ Прямокутні трикутники SPQ і SPR рівні за спільним катетом SP і рівними гіпотенузами SQ та SR. Тому PQ = PR. За теоремою про три перпендикуляри $PQ \perp OA$ , $PR \perp OB$. Прямокутні трикутники PQO та PRO, таким чином, мають спільну гіпотенузу OP і рівні катети PQ та PR. З рівності цих трикутників впливає рівність їх відповідних кутів: $\angle POQ = \angle POR$. Твердження доведено.




Задача №40

З точки до площини рівнобедреного трикутника проведено перпендикуляр, основа якого належить основі трикутника. Бічні сторони трикутника віддалені від даної точки на 15 см. Основа трикутника дорівнює 30 см, а висота, проведена до неї, 20 см. Обчислити відстань від даної точки до площини трикутника.

Відповідь: 9 см.

Задача №41

З точки до площини трикутника зі сторонами 32, 40 і 48 см проведено перпендикуляр довжиною 18 см. Основа перпендикуляра належить стороні трикутника, що дорівнює 40 см. Дві інші сторони трикутника рівновіддалені від даної точки. Обчислити відстань від даної точки до цих сторін.

Відповідь: 24 см.

Задача №42

З деякої точки до площини рівнобедреного трикутника, основа і бічна сторона якого відповідно дорівнюють 66 і 55 см, проведено перпендикуляр з основою на бічній стороні. Дві інші сторони цього трикутника віддалені від даної точки на 30 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини трикутника.

Відповідь: 18 см.

Задача №43*

З точки до площини прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 28 і 21 см, проведено перпендикуляр довжиною 9 см. Основа перпендикуляра належить гіпотенузі трикутника, а катети рівновіддалені від даної точки. Обчислити відстані від точки до катетів.

Відповідь: 15 см, 15 см.

Задача №44*

З точки до площини рівнобічної трапеції, менша основа і бічні сторони якої дорівнюють по $6\sqrt{3}$ см, проведено перпендикуляр довжиною 12 см. Основа перпендикуляра лежить на більшій основі трапеції, а три інші її сторони рівновіддалені від цієї точки. Обчислити відстані від точки до сторін трапеції.

Відповідь: 15 см, 15 см.

### *2.8 Точка, що рівновіддалена від сторін многокутника*

***Якщо точка рівновіддалена від сторін многокутника, то основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини многокутника, є центром кола, вписаного в цей многокутник.***

Задача №45

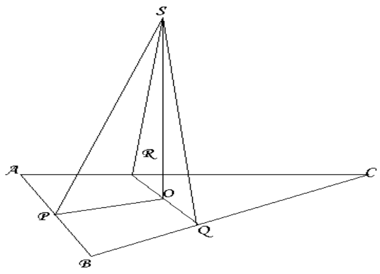
Точка рівновіддалена від сторін трикутника. Довести, що основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини трикутника, є центром кола, вписаного в цей трикутник.

Нехай $\alpha$ – площина заданого трикутника ABC, S – задана точка, $SO \perp \alpha$,

$SP \perp AB$, $SQ \perp BC$, $SR \perp AC$ і $SP = SQ = SR$.

За теоремою про три перпендикуляри $OP \perp AB$, $OQ \perp BC$, $OR \perp AC$. Отже, необхідно довести, що $OP=OQ=OR$. Оскільки $SO \perp \alpha$, то $\angle SOP = \angle SOQ = \angle SOR = 90^{\circ}$. Прямокутні трикутники SOP, SOQ, SOR рівні (за спільним катетом SO і рівними гіпотенузами SP,SQ, і SR). З рівності цих трикутників випливає рівність їх катетів OP, OQ та OR.

Твердження доведено.




Задача №46

Основи рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 8 см і 18 см. Деяка точка віддалена від кожної сторони трапеції на 10 см Обчислити відстань від цієї точки до площини трапеції.

Відповідь: 8 см.

Задача №47

Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 24 см і 20 см. Відстані від деякої точки простору до кожної зі сторін трикутника дорівнюють по 10 см. Обчислити відстань цієї точки до площини трикутника.

Відповідь: 8 см.

Задача №48*

Діагоналі ромба дорівнюють 30 і 40 см. Точка віддалена від кожної сторони ромба на 20 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини ромба.

Відповідь: 16 см.

Задача №49*

У прямокутному трикутнику перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки 9 і 16 см. Точка простору віддалена від кожної сторони трикутника на 13 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини трикутника.

Відповідь: 12 см.

Задача №50*

Площа рівнобедреного трикутника 1200 см$^2$, а його основа 60 см. Точка простору віддалена від кожної сторони трикутника на 39 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини трикутника. Відповідь: 36 см.

## *3 Перпендикулярність площин*

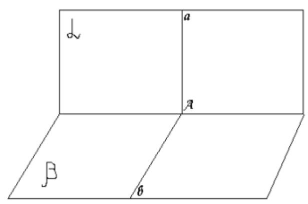
### *<u>3.1 Перпендикулярність площин</u>*

***Якщо пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину, то вона перпендикулярна до другої площини.***

Задача №51

Якщо пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину, то вона перпендикулярна до другої площини. Довести це.

Нехай $\alpha \perp \beta$, $l$ – пряма перетину площин, a $\perp$ $l$ у площині $\alpha$, A – точка перетину прямих a і $l$. Проведемо через точку A пряму b $\perp$ $l$ у площині $\beta$. Площина, що проходить через прямі a і b, перпендикулярна до $l$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). За означенням кута між площинами і за умовою задачі a $\perp$ b. Оскільки a $\perp$ $l$ і a $\perp$ b, то $\alpha \perp \beta$. Твердження задачі доведено.



Задача №52

Якщо дві площини перпендикулярні і до однієї з них проведено перпендикуляр, що має спільну точку з другою площиною, то він лежить у цій площині. Довести це.

Задача №53

З кінців відрізка, що належать двом перпендикулярним площинам, до лінії перетину площин проведено перпендикуляри, що дорівнюють $4\sqrt{2}$ і 4 см. Відстань між основами перпендикулярів дорівнює 4 см. Обчислити кути, утворені відрізком з цими площинами.

Відповідь: $30^0$ і $45^0$.

Задача №54

Відрізок довжиною 25 см спирається кінцями на дві перпендикулярні площини. Відстані від кінців відрізка до площин дорівнюють 15 і 16 см. Обчислити проекції відрізка на кожну з площин.

Відповідь: 27 см.

Задача №55*

Дві прямі, відстань між якими 17 см, належать двом перпендикулярним площинам і паралельні лінії їх перетину. Відстань від однієї з прямих до лінії перетину площин дорівнює 8 см. Обчислити відстань від другої прямої до цієї лінії.

Відповідь: 15 см.

Задача №56*

Відрізок належить одній з двох перпендикулярних площин і не перетинає іншу. Кінці цього відрізка віддалені від прямої перетину площин на 7 і 10 см. Перший кінець відрізка віддалений на 25 см від прямої, що лежить у другій площині і паралельна прямій перетину площин. Обчислити відстані від другого кінця і від середини відрізка до цієї прямої.

Відповідь: 26 см, $\frac{\sqrt{2593}}{2}$ см.

*3.2 Двогранні кути. Кут між площинами*

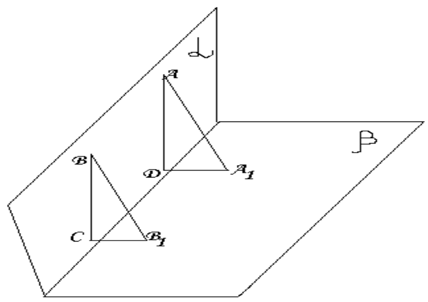
Задача №57

На одній грані гострого двогранного кута взято дві точки, що віддалені від ребра кута на 54 і 36 см. Перша з цих точок віддалена від другої грані на 24 см. Обчислити відстань від другої точки до цієї ж грані.

Нехай α і β – грані двогранного кута, CD – його ребро. A і B належать α, $AD \perp CD$, $BC \perp CD$, AD = 54 см, BC = 36 см, $AA_1 \perp \beta$, $AA_1$ = 24 см, $BB_1 \perp \beta$. Знайдемо $BB_1$.

За теоремою про три перпендикуляри $A_1D \perp CD$ і $CB_1 \perp CD$. Тому кути $ADA_1$ і $BCB_1$ рівні як лінійні кути двогранного кута.

Оскільки $AA_1 \perp \beta$, $BB_1 \perp \beta$, то кути $AA_1D$ і $BB_1C$ дорівнюють $90^0$. З трикутника $AA_1D$ $\sin D = \frac{4}{9}$, з трикутника $BB_1C$ $\sin C = \frac{BB_1}{36}$. Звідси $BB_1$ = 16 см.
Відповідь: 16 см.




Задача №58

Площі двох рівнобедрених трикутників відповідно дорівнюють 15 і 40 см$^2$, а їх спільна основа має довжину 10 см. Кут між площинами трикутників 60$^o$. Обчислити відстань між вершинами цих трикутників.

Відповідь: 7 см або $\sqrt{97}$ см.

Задача №59

Основа рівнобедреного трикутника співпадає зі стороною правильного трикутника. Основою перпендикуляра, проведеного з вершини першого трикутника до площини другого, є вершина правильного трикутника. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 12 і $6\sqrt{5}$ см. Обчислити кут між площинами цих трикутників.

Відповідь: 30$^0$.

Задача №60

Пряма, що лежить в одній із двох площин, що утворюють між собою кут 30$^o$, паралельна лінії перетину цих площин і віддалена від неї на 24 см. Обчислити відстань від прямої до другої площини.

Відповідь: 12 см.

Задача №61

Рівнобедрені трикутники мають спільну основу довжиною 16 см, а їх площини утворюють між собою кут 60$^o$. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, а бічні сторони другого – взаємно перпендикулярні. Обчислити відстань між вершинами трикутників.

Відповідь: 13 см або $\sqrt{409}$ см.

Задача №62*

Квадрат і прямокутник, площі яких відповідно дорівнюють 64 і 120 $см^2$, мають спільну сторону. Кут між площинами цих фігур дорівнює $60^o$. Обчислити відстань між сторонами квадрата і прямокутника, протилежними до їх спільної сторони.

Відповідь: 13 см або $\sqrt{409}$ см.

*3.3 Площа ортогональної проекції многокутника*

***Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.***

***Якщо ортогональною проекцією квадрата є ромб, то одна з діагоналей ромба (більша) дорівнює діагоналі квадрата.***

***Коли ортогональною проекцією ромба є квадрат, то одна з діагоналей ромба (менша) дорівнює діагоналі квадрата.***

Задача №63

Ортогональною проекцією квадрата на площині, що містить одну з його вершин, є ромб з діагоналлю $24\sqrt{2}$ і $12\sqrt{2}$ см. Обчислити кут між площинами ромба і квадрата.

Відповідь: $60^0$.

Задача №64

Ортогональною проекцією правильного трикутника на площину, що містить одну з його вершин, є прямокутний рівнобедрений трикутник. Обчислити кут між площинами цих трикутників.

Відповідь: $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Задача №65

Ортогональною проекцією квадрата, сторона якого паралельна площині проекції, є прямокутник з діагоналлю $6\sqrt{5}$ см і стороною 12 см. Обчислити кут між площинами прямокутника і квадрата.

Відповідь: $60^0$.

Задача №66*

Ортогональною проекцією ромба на площину, що містить одну з його вершин, є квадрат. Обчислити кут між площинами ромба і квадрата, якщо сторона і діагональ ромба відповідно дорівнюють $2\sqrt{7}$ см і 8 см.

Відповідь: $30^0$.

Задача №67*

Ортогональною проекцією трапеції зі сторонами 5, 5, 5 та 11 см є трапеція з площею $16\sqrt{3}$ см$^2$. Обчислити кут між площинами обох трапецій.

Відповідь: $30^0$.

# II. Многогранники і тіла обертання

## *1 Призми*

### *1.1 <u>Трикутні призми</u>*

Задача №68

В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містить сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d і утворює з площиною основи кут γ. Визначити об'єм призми.

Відповідь: $\frac{d^3 \gamma sinsin\, \gamma sinsin\, \alpha sinsin\, \beta}{2 sinsin\, (\alpha+\beta)}$.

Задача №69

В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом $\beta$ при вершині. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, дорівнює d і утворює з площиною основи кут α. Визначити об'єм призми.

Відповідь: $0.5d^3 \alpha\, sin\, sin_{\alpha\ sin}\, sin_{\beta}$

Задача №70*

Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гострим кутом α і гіпотенузою с. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, утворює з площиною основи кут $\beta$. Визначити об'єм призми.

Відповідь: $\frac{1}{4} c^3 \sin 2\alpha\ tg\beta$.

Задача №71*

У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані утворює з бічним ребром кут $\beta$. Радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $6R^2\sin 2\beta$.

Задача №72*

У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані дорівнює d і утворює з площиною основи кут α. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $\frac{3}{2}d^2\sin 2\alpha$.

*1.2 Чотирикутні призми*

Задача №73

Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює $l$ і утворює з площиною основи кут $\beta$. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $\sqrt{2}\ l^2\sin 2\beta$.

Задача №74

В основі прямої призми лежить прямокутник з кутом α між діагоналями. Діагональ призми дорівнює $l$ $i$ утворює з площиною основи кут $\beta$. Визначити об’єм призми.

Відповідь: $\frac{1}{2}\ l^3\cos^2\beta\sin\beta\sin\alpha$.

Задача №75

В основі прямої призми лежить ромб з тупим кутом $\beta$ і меншою діагоналлю $l$. Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом α. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $\frac{2l^2 tg\,\alpha}{cos cos\frac{\beta}{2}}$.

Задача №76*

В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α. Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми утворює з площиною основи кут $\beta$. Визначити об’єм призми.

Відповідь: $\sqrt{2}\ c^3 sin^3\alpha\ tg\beta$ .

## 2 *Піраміда*

### *2.1 Піраміди, в яких задано плоский кут при одній з вершин*

Задача №77

У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює a, а плоский кут при вершині – $\beta$. Визначити повну поверхню піраміди.

Відповідь: $2\sqrt{3}b^2 sin\frac{\beta}{2}\ sin\ sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ .

Задача №78

У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут α. Визначити повну поверхню піраміди, якщо її апофема дорівнює a.

Відповідь: $\sqrt{3}a^2 ctg\alpha\ (\sqrt{3}+ctg\alpha)$.

Задача №79*

У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут $\beta$. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо радіус кола, вписаного в бічну грань, дорівнює r.

Відповідь: $3r^2 ctg^2\frac{\beta}{2}tg\beta$.

Задача №80*

У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут $\beta$. Відрізок, що сполучає центр вписаного в бічну грань кола з вершиною основи цієї грані, дорівнює *l*. Визначити бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $4l^2 cos^2\frac{\beta}{2}tg\beta$.

### *2.2 Піраміди, в яких бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами*

***Якщо в деякій піраміді всі бічні ребра рівні між собою, або якщо вони утворюють з площиною основи рівні кути, або якщо вони утворюють висотою піраміди рівні кути, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи.***

Задача №81

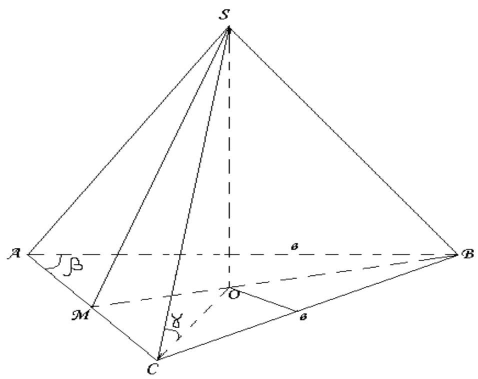
В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом β при основі. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом γ. Визначити об'єм піраміди.

Нехай SABC – задана піраміда, AB=BC= b, ∠CAB = ∠ACB=β. Проведемо висоту піраміди SO. Тоді OA, OB, OC- проекції бічних ребер на площину основи. За умовою ∠SAO= ∠SBO= ∠SCO=γ.

Об`єм піраміди $V=\frac{1}{3}$ S*H.

Оскільки ∠ABC =180°- 2β, то $S_{осн} = \frac{1}{2}$ $b^2$ sin2β. Прямокутні трикутники SAO, SBO і SCO мають спільний катет SO і рівні гострі кути, а тому рівні між собою. Тоді OA = OB = OC, тобто точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC. З цього трикутника за наслідком з теореми синусів знаходимо: $\frac{BC}{sinsin\,\beta}$ = 2R = 2OA; OA = $\frac{b}{2sinsin\,\beta}$. З трикутника SAO ∠O=90°, H = SO = $\frac{b\ tg\gamma}{2sinsin\,\beta}$. Отже, V = $\frac{1}{6}$ $b^3$cosβ tgγ.

Відповідь: V = $\frac{1}{6}$ $b^3$cosβ tgγ.




Задача №82

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут γ. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{a^3\,ctg\,\gamma\,ctg\,\frac{\alpha}{2}}{24\,sin\,\alpha}$.

Задача №83

У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Визначити об'єм піраміди, якщо радіус кола, вписаного в його основу, дорівнює *r*.

Відповідь: $2\sqrt{3}r^3 tg\,\beta$.

Задача №84*

В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом β. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють в і утворюють з її висотою кут α. Визначте об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{1}{3}$в$^3 sin^2\alpha \, cos\, cos_{\,\alpha\, sin}\, sin\, 2\beta$ .

Задача №85*

Основою піраміди є прямокутник. Діагональ цього прямокутника дорівнює d і утворює з його стороною кут α. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут β. Визначте об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{1}{12} d^3\, sin\, sin\, 2\alpha\, ctg\, \beta$ .

*2.3 Піраміди, в яких всі двогранні кути при основі рівні між собою*

***Якщо в деякій піраміді всі двогранні кути при основі рівні між собою, або висоти бічних граней рівні між собою, або висоти бічних граней утворюють з висотою піраміди рівні кути, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу.***

***Якщо в піраміді двогранні кути при основі рівні γ, то $S_{осн} = S_б \cdot cos\gamma$.***

Задача №86

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і радіусом вписаного кута r. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ. Визначити об'єм піраміди.

Нехай SABC – задана піраміда, ∠CAB= ∠ACB=α. З вершини S проведемо висоту SO піраміди та перпендикуляри SK, SL і SM до сторін AB, BC, CA. За теоремою по три перпендикуляри OK⊥AB, OL⊥BC і OM⊥CA, тоді ∠SKO, ∠SLO, ∠SMO є лінійними кутами двогранних кутів при основі піраміди. За умовою ∠SKO = ∠SLO = ∠SMO = γ. Трикутники SKO, SLO і SMO прямокутні, мають спільний катет SO і рівні гострі кути. Тому Δ SKO=Δ SLO=Δ SMO, звідки OK=OL=OM. Точка O, таким чином, рівновіддалена від сторін трикутника ABC, а, значить, є центром кола, вписаного в цей трикутник, причому точки K, L і M є точками дотику кола до сторін AB, BC і CA. За умовою OK = OL = OM = r.

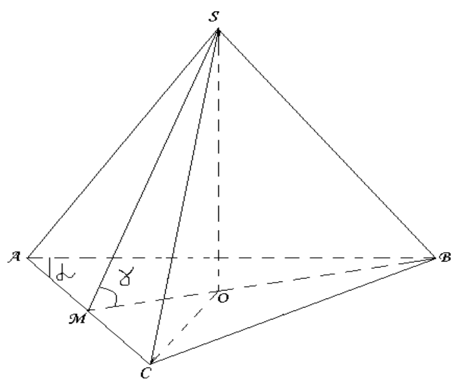
Об`єм піраміди $V=\frac{1}{3}\,S_{осн}\,H$. З трикутника SMO: $H = SO = r\,tg\gamma$. Оскільки точка O, як центр вписаного кола, є точкою перетину бісектрис трикутника ABC, то $\angle MAO=\angle MCO=\frac{\alpha}{2}$. Тоді $\Delta$ AOM=$\Delta$COM (за катером і гострим кутом), звідки AM=MC. Медіана BM рівнобедреного трикутника є одночасно його бісектрисою, а тому O $\epsilon$ BM.

З трикутника MAO: $\angle M= 90^0$, $AM =r\,ctg\frac{\alpha}{2}$. З трикутника ABM: $BM = r\,ctg\frac{\alpha}{2}\,tg\alpha$.

Оскільки AC = 2AM, $S_{осн} = \frac{1}{2}\,AC\cdot BM=r^2ctg^2\frac{\alpha}{2}\,tg\alpha$.

Тоді $V= \frac{1}{3}r^3ctg^2\frac{\alpha}{2}\,tg\alpha\,tg\gamma$.

Відповідь: $\frac{1}{3}\,r^3ctg^2\frac{\alpha}{2}\,tg\alpha\,tg\gamma$.




Задача №87

Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ. Визначити об’єм піраміди.

Відповідь: $\frac{c^3\,sinsin\,2\alpha coscos\,\alpha\,tg\,\gamma}{12(1+ctg(\frac{\alpha}{2}))}$.

Задача №88

В основі піраміди лежить ромб з тупим кутом β і висотою h. Усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, утворюють з її висотою кут γ. Визначити об’єм піраміди.

Відповідь: $\frac{h^3 ctg\,\gamma}{6 sinsin\,\beta}$.

Задача №89

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині і радіусом описаного кола R. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{2}{3}R^3 cos^2\frac{\beta}{2} sin^2\beta\, tg\left(45° - \frac{\beta}{4}\right) tg\gamma$.

Задача №90*

Основою піраміди є ромб з більшою діагоналлю d і гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{1}{12}d^3 sin\frac{\alpha}{2} tg\frac{\alpha}{2} tg\beta$.

Задача №91*

Основою піраміди є трикутник з кутами α і β та радіусом описаного кола R. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ. Визначити бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{2R^2 sin\alpha\ sin\beta\ sin(\alpha+\beta)}{cos\gamma}$.

## *2.4 Піраміди, в яких дві бічні грані перпендикулярні до площини основи*

***Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди буде їх спільне бічне ребро.***

Задача №92

Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом *b* і прилеглим до нього гострим кутом β. Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до неї під кутом *α*. Визначити бічну поверхню піраміди.

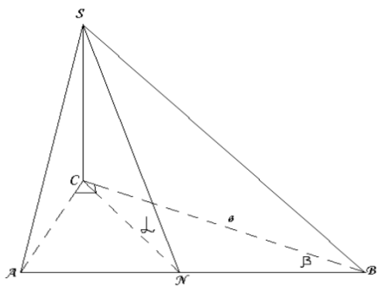
Нехай SABC – задана піраміда, ∠BCA = 90°, ∠ABC = β, BC = *b*. Тоді перпендикулярними до площини основи є грані SBC і SAC, а отже, і пряма SC їх перетину. Тому SC – висота піраміди. Проведемо висоту SN грані SBC. За теоремою про три перпендикуляри CN перпендикулярно AB. Згідно з умовою задачі ∠SNC = α.

Бічна поверхня піраміди $S_б = S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SAB}$. З трикутника ABC AC = b tgβ. З трикутника CNB ∠N = 90°: CN = b sinβ. З трикутника SCN ∠C = 90°:

SC = b sinβ tgα. Тоді $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}$ BC · SC = $\frac{1}{2}$ $b^2$ sinβ tgα. $S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}$ AC · SC = $\frac{1}{2}$ $b^2$ sinβ tgα tgβ. Оскільки ортогональною проекцією трикутника SAB на площину основи є трикутник ABC, то $S_{\Delta SAB} = \frac{Sосн}{coscos\,\alpha} = \frac{b^2\,tg\,\beta}{2coscos\,\alpha}$ .

Отже, S бічне = $\frac{b^2\,tg\,\beta\,(coscos\,\beta sinsin\,\alpha + sinsin\,\beta sinsin\,\alpha + 1\ )}{2coscos\,\alpha}$ .

Відповідь: $\frac{b^2\,tg\,\beta\,(coscos\,\beta sinsin\,\alpha + sinsin\,\beta sinsin\,\alpha + 1\ )}{2coscos\,\alpha}$ .




Задача №93

В основі піраміди лежить ромб зі стороною a і тупим кутом β. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом α. Визначити бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{d^2 sin\beta(sin\alpha+1)}{cos\alpha}$.

Задача №94

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі і радіусом вписаного кола *r*. Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом α. Визначити бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{r^2 ctg^2\frac{\beta}{2} tg\beta(1+sin\alpha+2sin\alpha\ cos\beta)}{cos\alpha}$.

Задача №95*

Основою піраміди є квадрат. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом γ. Рівні бічні ребра піраміди дорівнюють b. Визначити об’єм піраміди.

Відповідь: $\frac{1}{3}b^3cos^2\gamma\ sin\gamma$.

Задача №96*

Основою піраміди є правильний трикутник. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом α. Висота піраміди дорівнює H. Визначити бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}H^2ctg\alpha(1+2sin\alpha)}{3sin\alpha}$.

## *2.5 Трикутні піраміди, в яких одна бічна грань перпендикулярна до площини основи*

***Якщо у трикутній піраміді одна бічна грань перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до основи під рівними кутами, то проекцією вершини піраміди є основа бісектриси трикутника, що лежить в основі піраміди.***

***Якщо тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, то висотою піраміди є висота цієї бічної грані.***

Задача №97

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом β при вершині. Бічна грань піраміди, що містить бічну сторону цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до площини основи під кутом α. Визначити об'єм піраміди.

Нехай SABC – задана піраміда, AB = BC = b, ∠ABC = β, грань SAB перпендикулярна до площини основи. Проведемо висоту SO піраміди та висоти SM і SN граней SBC і SAC. Тоді OM і ON – проекції висот SM і SN на площину основи. За умовою задачі ∠SMO = ∠SNO = α.

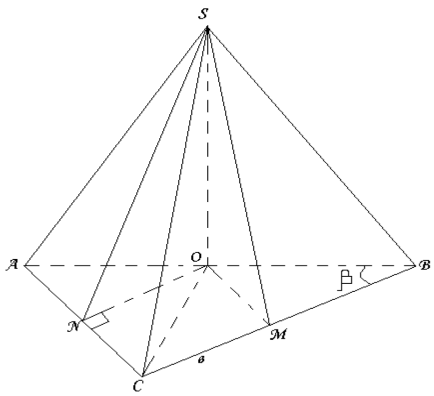
Об'єм піраміди V = $\frac{1}{3}$ $S_{осн}$H; $S_{осн}$ = $\frac{1}{2}$AB BC sinβ = $\frac{1}{2}$ $b^2$ sinβ. Оскільки бічна грань SAB перпендикулярна до площини основи, то основа O - висота піраміди - належить прямій AB. З рівності прямокутних трикутників SOM і SON (SO – спільний катет, ∠ M = ∠ N) випливає, що OM = ON. Отже, точка O рівновіддалена від сторін кута ACB, а тому належить його бісектрисі. Тоді точка O, як основа бісектриси CO трикутника ACB, належить відрізку AB, звідки AO+OB = AB. З трикутника ONA (∠N=$90^0$, кут A =$\frac{180-\beta}{2}$ = $90^0$- $\frac{\beta}{2}$):

AO = $\frac{ON}{sin(90-\frac{\beta}{2})}$ = $\frac{OM}{coscos\,(\frac{\beta}{2})}$. З трикутника OMB ($\angle$M = $90^0$): OB = $\frac{OM}{sin\beta}$. Тому

$\frac{OM}{cos(\frac{\beta}{2})}$ + $\frac{OM}{sin\beta}$ = b, звідки OM = $\frac{b\ sin\beta}{1+2\ sin(\frac{\beta}{2})}$. З трикутника SOM ($\angle$O = $90^0$):

H = SO = OM tgα = $\frac{b\beta\ tg\alpha}{1+2\ sin(\frac{\beta}{2})}$. Отже, V = $\frac{b^3\ sin^2\beta\ tg\alpha}{6(1+2sinsin\left(\frac{\beta}{2}\right))}$.

Відповідь: $\frac{b^3\ sin^2\beta\ tg\alpha}{6(1+2sinsin\left(\frac{\beta}{2}\right))}$.




Задача №98

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Бічна грань, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до площини основи під кутом β. Визначити бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{d^2\,ctg\frac{\alpha}{2}(1+sin\frac{\alpha}{2}sin\beta)}{4cos\beta}$.

Задача №99

Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Бічна грань, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до площини основи під кутом β. Визначити об’єм піраміди.

Відповідь: $\frac{c^3\,sin2\alpha\ cos\alpha\ tg\beta}{12(1+ctg\alpha).}$

Задача №100*

Основою піраміди є правильний трикутник, площа якого дорівнює S. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до площини основи під кутом α. Визначити об’єм піраміди.

Відповідь: $\frac{\sqrt[4]{3}}{6} S\sqrt{S}\text{tg}\alpha$.

Задача №101*

Основою піраміди є правильний трикутник з основою a і кутом α при основі. Бічна грань піраміди, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до площини основи під кутом β. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{1}{24}\, a^3 tg\alpha\ sin\alpha\ tg\beta$.

Задача №102*

Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом β. Бічна грань, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до площини основи під кутом α. Визначити бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{c^2\, cos\beta(sin\beta+cos\beta+sin\alpha)}{2cos\alpha\,(1+ctg\beta)}$.

## *2.6 Піраміди, в яких задана відстань між деякими двома їх точками або відстань від деякої точки до бічного ребра чи апофеми*

***Якщо в деякій піраміді всі бічні ребра рівні або якщо вони утворюють з площиною основи рівні кути, то відстані від основи висоти піраміди до бічних ребер рівні між собою.***

Задача №103

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут γ. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічного ребра дорівнює d.

Нехай SABC – задана піраміда, AB = BC, ∠CAB = α. Проведемо висоту SO. Проекціями бічних ребер SA, SB, SC є відрізки OA, OB, OC. Згідно з умовою ∠SAO =∠SBO =∠ SCO = γ. Прямокутні трикутники SAO, SBO, SCO мають спільний катет SO і рівні гострі кути. Тому ∆ SAO=∆ SBO=∆ SCO. У рівних прямокутних трикутниках висоти, проведені до гіпотенуз, рівні. Це означає, що відстані від точки O до бічних ребер рівні.

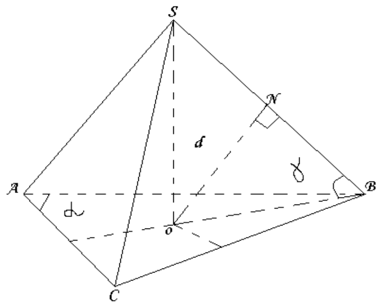
Проведемо з точки O перпендикуляр ON до ребра SB. За умовою ON = d.

З ∆ONB (∠N = 90°): $OB = \frac{ON}{sinsin\, B} = \frac{d}{sinsin\,\gamma}$.

З $\Delta SOB$ ($\angle O = 90^o$): $H = SO = OB \cdot tgB = \frac{d}{sinsin\,\gamma} \cdot tg\gamma = \frac{d}{coscos\,\gamma}$. Оскільки $OA = OC = OB$, то точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC: $\frac{BC}{sinsin\,\alpha} = 2OB$;

$BC = 2OB \cdot sin\,sin\,\alpha = \frac{2dsinsin\,\alpha}{sinsin\,\gamma}$. Оскільки в трикутнику ABC AB = BC і кут B = $180^o - 2\alpha$, то $S_{осн} = \frac{2d^2\,\alpha\,sin2\alpha}{sin^2\,\gamma}$. Тоді $V = \frac{4d^3sin^2\,\alpha sinsin\,2\,\alpha}{3sinsin\,\gamma sinsin\,2\gamma}$

Відповідь: $\frac{4d^3sin^2\,\alpha sinsin\,2\,\alpha}{3sinsin\,\gamma sinsin\,2\gamma}$




Задача №104

В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом β. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом α. Відстань від основи висоти піраміди до бічного ребра дорівнює d. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{2\,d^3\,sin2\beta}{3sin2\alpha\;sin\alpha}$.

Задача №105

В основі піраміди лежить трикутник з кутами α і β. Усі бічні ребра піраміди рівні. Перпендикуляр, проведений з основи висоти піраміди до бічного ребра, дорівнює d і утворює з висотою кут γ. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{2d^3\,sin\alpha\;sin\beta\;sin(\alpha+\beta)}{3\,sin^2\gamma\;cos\,\gamma}$.

Задача №106*

В основі піраміди лежить прямокутник, діагональ якого утворює зі стороною кут β. Усі бічні ребра піраміди рівні. Перпендикуляр, проведений з основи висоти піраміди до бічного ребра, дорівнює l і утворює з площиною основи кут γ. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{2l^3 sin2\beta}{3cos^2\gamma\ sin\gamma}$.

Задача №107*

У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут α. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від середини висоти до бічного ребра дорівнює a.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{3}a^3}{cos^2\alpha\ sin\alpha}$.

Задача №108*

У правильній чотирикутній піраміді кут між бічним ребром та площиною основи дорівнює β. Бісектриса цього кута перетинає висоту піраміди у точці, яка знаходиться на відстані b від бічного ребра. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{2}{3}b^3 ctg^3\frac{\beta}{2}tg\beta$.

## *2.7 Піраміди, в яких задано перпендикуляр, проведений з деякої точки до бічної грані*

***Якщо в довільній піраміді з деякої точки її висоти опустити перпендикуляр до бічної грані, то основа цього перпендикуляра лежить на висоті даної грані, проведеній з вершини піраміди.***

Задача №109

У правильній трикутній піраміді висота утворює з площиною бічної грані кут β. Відстань від середини висоти до бічної грані дорівнює b. Визначити об'єм піраміди.

Нехай SABC – задана піраміда, SO – її висота, точка L – середина висоти, LN – перпендикуляр, проведений з точки L до грані SAC, LN = b. Покажемо, що точка N належить апофемі SM грані SAC. Дійсно, пряма AC перпендикулярна до апофеми SM і її проекції OM на площину основи. Тому пряма AC перпендикулярна до площини SOM. Оскільки площина SAC містить пряму AC, то вона теж перпендикулярна до площини SOM. Тоді перпендикуляр LN до площини SAC лежить у площині SOM. Він є перпендикуляром, проведеним з середини катета прямокутного трикутника SOM до гіпотенузи SM, а тому його основа N належить апофемі SM. З перпендикулярності площин SOM і

SAC впливає, що проекцією прямої SO на площину SAC є пряма SM. Тому за умовою $\angle MSO = \beta$.

Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3}$ $s_{осн} \cdot H$. З $\Delta SNL$

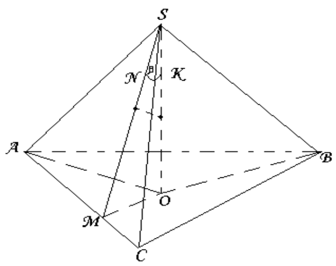
($\angle N = 90^o$): $SL = \frac{b}{sin\beta} \cdot H = SO = 2SL = \frac{2b}{sin\beta}$

З трикутника SOM $\angle O = 90^o$ : $OM = \frac{2b}{sin\beta} \cdot tg\beta = \frac{2b}{cos\beta}$ .

Оскільки O – центр трикутника ABC, то $BM = 3OM = \frac{6b}{cos\beta}$ . З трикутника ABM ($\angle M = 90^o$)

$AM = BM \cdot ctg60^o = \frac{2\sqrt{3}b}{cos\beta}$. У правильному трикутнику висота BM є медіаною. Тому S основи $= \frac{1}{2}$ $AC \cdot BM = AM \cdot BM = \frac{12\sqrt{3}b^2}{cos^2\beta}$.

Отже, $V = \frac{8\sqrt{3}b^3}{cos^2\beta \cdot sinsin\,\beta}$. Відповідь: $\frac{8\sqrt{3}b^3}{cos^2\beta \cdot sinsin\,\beta}$.




Задача №110

У правильній трикутній піраміді бічна грань утворює з площиною основи кут α. Визначити повну поверхню піраміди, якщо відстань від вершини основи до протилежної бічної грані дорівнює а.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{3}a^2 ctg\frac{\alpha}{2}}{3sin2\alpha}$.

Задача №111

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до неї під кутом β. Відстань від основи висоти піраміди до третьої бічної грані дорівнює *l*. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{l^3}{6sin^2\beta\ cos\beta\ sin2\alpha}$.

Задача №112*

В основі піраміди лежить правильний трикутник. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя – утворює з нею кут α. Відстань від основи висоти піраміди до третьої бічної грані дорівнює d. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}d^3}{9cos\alpha\ sin^2\alpha}$.

Задача №113*

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до неї під кутом α. Відстань від основи висоти піраміди до третьої бічної грані дорівнює d. Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{d^3\,tg\frac{\beta}{2}}{3sin^2\alpha coscos\,\alpha}$.

## 3 *Тіла обертання*

### *3.1 <u>Циліндри</u>*

Задача №114

Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Діагональ утвореного перерізу дорівнює *l* і нахилена до площини основи під кутом β. Визначити об'єм циліндра.

Відповідь: $\frac{\pi l^3 cos^2\beta\ sin\beta}{4sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача №115

Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу α. Діагональ перерізу утворює з площиною основи кут β, а його площа дорівнює S. Визначити площу основи циліндра.

Відповідь: $\frac{\pi Sctg\beta}{4sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача №116

Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу β. Відрізок, що сполучає центр основи циліндра з точкою кола іншої основи дорівнює α і утворює з площиною основи кут α . Визначити площу перерізу.

Відповідь: $a^2 sin2\alpha\, sin\frac{\beta}{2}$.

Задача №117

Паралельно осі циліндра, бічна поверхня якого дорівнює Q, проведено площину. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Визначити площу перерізу, якщо відрізок, що сполучає центр основи циліндра з точкою кола іншої основи, утворює з площиною кут α.

Відповідь: $\frac{Q\, tg\alpha\, ctg\beta}{2\pi}$.

Задача №118

Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу β. Визначити бічну поверхню циліндра, якщо діагональ утвореного перерізу дорівнює α і утворює з площиною основи кут α.

Відповідь: $\frac{\pi a^2\, sin2\alpha}{2sin\frac{\beta}{2}}$.

Задача №119

Паралельно осі циліндра на відстані d від неї, проведено площину, що відтинає від кола основи дугу β. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом α. Визначити бічну поверхню циліндра.

Відповідь: $\frac{4\pi\, d^2\, tg\alpha\, tg\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\beta}{2}}$.

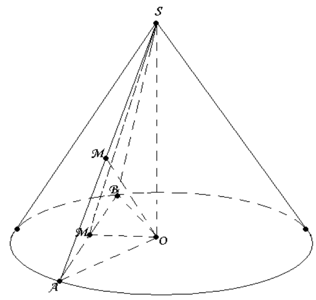
### *3.2 <u>Конуси</u>*

Задача № 120

Через вершину конуса, яку видно з вершини під кутом α, а з центра основи – під кутом β проведено площину, що перетинає його основу по хорді. Визначити бічну поверхню конуса, якщо відстань від центра його основи до середини твірної дорівнює d.

Нехай перерізом конуса площиною є трикутник SAB, SO- висота конуса, точка M – середина твірної SA. За умовою ∠ ASB=α, ∠AOB=β, OM = d.

Бічна поверхня конуса $S_б=\pi R_l$, де R=OA - радіус основи. l=SA-довжина твірної. У прямокутному трикутнику SOA, $\angle$ O=$90^0$ ,середина M гіпотенузи є центром описаного кола. Тому MS=MA=MO, звідки SA=2 OM=2d. З вершини S проведемо перпендикуляр SN до хорди AB. За теоремою про три перпендикуляри ON перпендикулярно AB. Оскільки SA=SB, то висота SN є бісектрисою і медіаною трикутника ASB. Тому $\angle NSA=\frac{\alpha}{2}$ і AN=NB. Аналогічно $\angle NOA=\frac{\beta}{2}$. З трикутника SNA: NA=2dsin$\frac{\alpha}{2}$ .З трикутника ONA: $OA=\frac{2dsin(\frac{\alpha}{2})}{sinsin\,(\frac{\beta}{2})}$ . Тоді $S_б=\frac{4\pi d^2 sin(\frac{\alpha}{2})}{sinsin\,(\frac{\beta}{2})}$



Задача №121

Через вершину конуса проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яка стягує дугу β. Кут при вершині перерізу дорівнює α. Визначити площу перерізу, якщо бічна поверхня конуса дорівнює Q.

Відповідь: $\frac{Q}{\pi} sin\frac{\beta}{2}\ cos\frac{\alpha}{2}$.

Задача №122

Через вершину конуса проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу β. Висота конуса утворює з площиною перерізу кут α. Визначити об’єм конуса, якщо відстань від середини його висоти до площини перерізу дорівнює d.

Відповідь: $\frac{8\pi\ d^3}{3cos^2\alpha\ sin\alpha\ cos^2\frac{\beta}{2}}$.

Задача №123

Через вершину конуса проведено площину під кутом β до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра його основи під кутом α. Визначити об’єм конуса, якщо відстань від його вершини до хорди дорівнює *l*.

Відповідь: $\frac{\pi\, l^3\ cos^2\beta sinsin\,\beta}{3cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача №124

Через вершину конуса, висота якого дорівнює Н, проведено площину під кутом β до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, що стягує дугу α. Визначити площу перерізу.

Відповідь: $\frac{H^2\ ctg\beta\ tg\frac{\alpha}{2}}{sin\beta}$.

## 4 *Комбінації геометричних фігур*

### *4.1 Циліндри, описані навколо призм*

***Якщо циліндр описаний навколо призми, то висота циліндра дорівнює висоті призми (бічному ребру призми), а основи призми є многокутниками, вписаними в основи циліндра.***

Задача №125

Основою призми є трикутник зі стороною *c* і прилеглими до неї кутами α і *β*. Діагональ бічної грані, що містить цю сторону трикутника, нахилена до площини основи під кутом γ. Визначити об’єм циліндра, описаного навколо даної призми.

 Нехай на основі прямої призми лежить трикутник АВС, в якому АВ = с,

∠А= α, ∠В= β. Проекцією діагоналі $B_1A$ на площину основи є сторона ВА трикутника. За умовою задачі $\angle B_1AB=\gamma$.

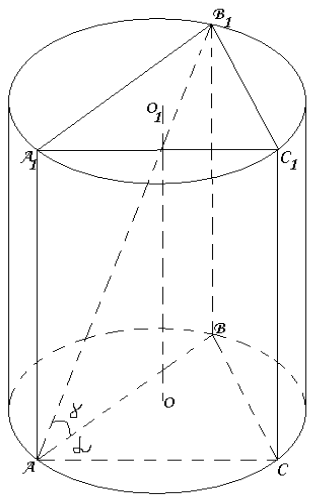
Висота Н циліндра, описаного навколо призми, дорівнює висоті призми, а радіус основи – радіус R кола, описаного навколо трикутника АВС. Об’єм циліндра $V=\pi\times R^2\times H$.

За наслідком з теореми синусів для трикутника АВС: $\frac{AB}{sinC}=2R$;

$$R=\frac{c}{2\,Sin(\alpha+\beta)}$$

($\angle B=90^0$): $H=BB_1=c\ tg\gamma$. Отже, $V=\frac{\pi c^3\ tgy}{4sin^2(a+\beta)}$

Відповідь: $\frac{\pi c^3\ tg\gamma}{4sin^2(a+\beta)}$




Задача №126

Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, дорівнює *a* і нахилена до площини основи під кутом α. Визначити бічну поверхню циліндра, описаного навколо призми.

Відповідь: $\frac{\pi a^2 sinsin\ 2\alpha}{2sin\beta}$.

*4.2* *<u>Циліндри, вписані в призми</u>*

***Якщо циліндр вписаний у призму, то кола його основ вписані в основи призми, висота циліндра є висотою призми, а бічні ребра призми є твірними циліндра.***

Задача № 127

Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α. Діагональ бічної грані призми дорівнює а і утворює з площиною основи кут β . Визначити бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

Відповідь : $\frac{1}{2}\pi a^2 sin2\beta sin\alpha$

Задача № 128*

Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, дорівнює b і нахилена до площини основи під кутом β. Визначити бічну поверхню циліндра , вписаного в дану призму.

Відповідь: $\pi b^2 sin2\beta cos\alpha\, tg\frac{\alpha}{2}$

*4.3 Конуси, описані навколо пірамід*

***Якщо конус описаний навколо піраміди, то їх вершини збігаються, висота конуса є висотою піраміди, бічні ребра піраміди є твірними конуса, а основа піраміди вписана в коло основи конуса.***

Задача № 129

В основі піраміди лежить прямокутник, діагональ якого утворює з більшою стороною кут α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Відрізок, що сполучає середину більшої сторони прямокутника з основою висоти піраміди, дорівнює $a$. Визначити об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.

Відповідь: $\frac{\pi a^3\ tg\gamma}{3\ sin^3\alpha}$.

Задача № 130

Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом α. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут β. Відстань від основи висоти піраміди до бічної сторони трапеції дорівнює $b$. Визначити бічну поверхню конуса, описаного навколо даної піраміди.

Відповідь: $\frac{\pi\ b^2}{sin^2\alpha\ sin\beta}$.

Задача № 131

Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом $a$ і прилеглим до нього гострим кутом α. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут γ. Визначити об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.

Відповідь: $\frac{\pi\ a^3 tg\gamma}{24 cos^3\alpha}$.

## *4.4 <u>Конуси, вписані в піраміди</u>*

***Якщо конус вписаний в піраміду, то їх вершини збігаються, висота конуса є висотою піраміди, коло основи конуса дотикається до всіх сторін основи піраміди, а бічні грані піраміди – дотичні до конуса, навколо якого піраміду описано.***

Задача № 132

В основі піраміди лежить ромб с гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ. Відрізок, що сполучає основу висоти піраміди з серединою сторони ромба, дорівнює b . Знайти V конуса, вписаного в дану піраміду.

Відповідь:$\frac{1}{3}\pi b^2 sin^3\alpha\, tg\gamma$

Задача № 133*

У піраміду, основою якої є рівнобічна трапеція з тупим кутом β, вписано конус. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ . Відстань від основи висоти піраміди до вершини даного кута трапеції дорівнює a. Визначити бічну поверхню конуса.

Відповідь.$\frac{\pi a^2 sin^2\frac{\beta}{2}}{coscos\,\gamma}$

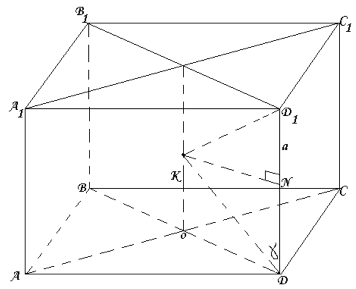
## *<u>4.5 Кулі та сфери, описані навколо призм</u>*

***Центром кулі, описаної навколо призми, є середина відрізка, що сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми, а вершини призми лежать на поверхні кулі (на сфері).***

Задача №134

Навколо правильної чотирикутної призми описано сферу. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з її бічним ребром кут γ. Визначити поверхню сфери, якщо бічне ребро призми дорівнює $a$.

Відповідь: $\frac{\pi\, a^2}{cos^2\gamma}$.




Задача №135

Навколо правильної трикутної призми описано кулю. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює х її бічним ребром кут γ. Визначити об'єм кулі, якщо бічне ребро призми дорівнює $b$.

Відповідь: $\frac{\pi\ b^3}{6cos^3\gamma}$.

Задача №136*

Навколо правильної чотирикутної призми описано кулю радіуса R. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з площиною її основи кут γ. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $4\sqrt{2R^2}\,sin\,sin\,2\gamma$.

*4.6 Кулі, описані навколо пірамід або конусів*

***Центр кулі, описаної навколо піраміди, є точкою перетину прямої, що містить висоту піраміди, з площиною, яка перпендикулярна до одного з бічних ребер і проходить через його середину.***

***Якщо в кулю вписано піраміду так, що вершина піраміди і центр кулі лежать по різні сторони від площини основи піраміди, то радіус кулі менший за висоту піраміди.***

***Якщо в кулю вписано піраміду так, що вершина піраміди і центр кулі лежать по одну сторону від площини основи піраміди, то радіус кулі більший за висоту піраміди.***

Задача № 137

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом $\beta$ при вершині. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $\gamma$. Визначити об'єм піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює R.

Нехай SABC-задана піраміда, AB=BC, $\angle ABC=\beta$. Проведемо висоту піраміди SO. Тоді OA, OB, OC-проекції бічних ребер на площину основи. За умовою задачі $\angle SAO= \angle SBO= \angle SCO=\gamma$. Нехай $O_1$- центр кулі, описаної навколо піраміди; $O_1S=R$.

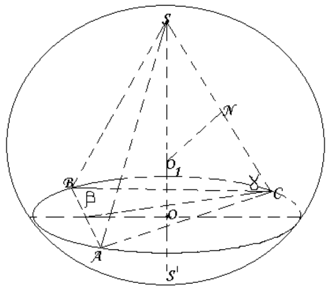
Об'єм піраміди $V=\frac{1}{3} S_{осн} H$.

Покажемо, що центр кулі лежить на прямій SO. Для цього спочатку розглянемо прямокутні трикутники ASO, BSO, CSO. Вони мають спільний катет SO і рівні гострі кути. Тому $\Delta$ ASO=$\Delta$ BSO=$\Delta$ CSO, звідки випливає, що AO=OB=OC, тобто, що точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC. Оскільки $O_1A= O_1B= O_1C=R$, то проекції похилих $O_1A$, $O_1B$ і $O_1C$ на площину ABC рівні між собою. Це означає, що проекція точки $O_1$ на площину ABC рівновіддалена від точок A, B і C, тобто, що цією проекцією є точка O. Оскільки проекціями точок S і $O_1$ на площину ABC є одна і та ж точка O, то $O_1$є SO. Відстані від точки до кінців ребер піраміди рівні між собою. Тому центр кулі, описаної навколо заданої піраміди, є точкою перетину прямої, що містить висоту піраміди, з площиною, яка перпендикулярна до одного з бічних ребер і проходить через його середину.

З точки $O_1$ проведемо перпендикуляр $O_1N$ до ребра SC. З $\Delta O_1SN$ ($\angle N=90^0$, $\angle S=90^0-\gamma$): $SN= O_1S \cos(90^0-\gamma)=R \sin \gamma$. Оскільки $O_1S= O_1C$, то SN=NC, а тому $SC=2\ SN=2R \sin\gamma$. З $\Delta$ SOC ($\angle O=90^0$ ): $OC=SC \cos\gamma = 2R \sin\gamma \cos\gamma =R \sin2\gamma$; $H=SO=SC \sin\gamma=2R\sin^2\gamma$. У трикутнику ABC кут $C=\frac{108°-\beta}{2} =90^0 - \frac{\beta}{2}$. За наслідком з теореми синусів: $\frac{AB}{sinsin\ кут\ C} =2\ OC = 2R \sin2\gamma \sin(90^0 - \frac{\beta}{2})$. Тоді $\frac{1}{2}$ $(2R \sin2\gamma \cos\frac{\beta}{2})^2 \sin\beta$.

Отже, $\frac{1}{3}\ 2R^2\sin^2 2\gamma \cos^2\frac{\beta}{2} \sin\beta\ 2R \sin^2\gamma$.

Відповідь: $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\gamma\ \sin^2\gamma \cos^2\frac{\beta}{2} \sin\beta$.



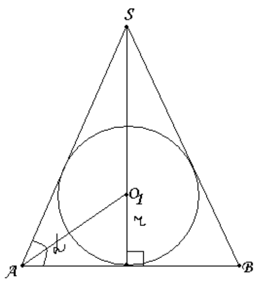

## *4.7 Кулі, вписані в піраміди або конуси*

***Якщо усі двогранні кути при основі деякої піраміди рівні між собою, то в цю піраміду можна вписати кулю. Центр цієї кулі є точкою перетину висоти піраміди з бісектрисою кута, утвореного висотою бічної грані, проведеної з вершини піраміди, і проекцією цієї висоти на площину основи.***

Задача №138

У конус вписано кулю радіуса r. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Визначити об'єм конуса.

Відповідь: $\frac{1}{3}\pi\, r^3 ctg^3 \frac{\alpha}{2}\, tg\alpha$.




Задача №139*

У конус вписано кулю. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом $\gamma$. Висота конуса дорівнює H. Визначити об'єм кулі.

Відповідь: $\frac{4}{3}\pi H^3\ ctg^3\gamma\ tg^3\frac{\gamma}{2}$.

## Література:


1. Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах)./Упор. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В.Єргіна.-Х.:Вид-во «Ранок»,2011.-384 с.
2. Бродський Я.С., Гречук В.Ю., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Стереометрія у старшій школі. – Т.: Навчальна книга – Богдан, 2005.
3. Кравчук В.Р., Підручна М.В., Тадеєв В.О., Чайковська Л.Й., Янченко Г.М. Випускний екзамен з математики. Частина 1. Геометрія. – Т.: Підручники і посібники, 1996.
4. Литвиненко Г.М., Собко М. С. Збірник задач і вправ для екзамену з математики. – Т.: Підручники і посібники, 1995.