

ГОЛОВНЕ УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ
ПЕДАГОГІЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ

Математична логіка

Гурток

(5-6 класи)

Черкаси
2008

АВТОРИ:

Козлова О.М., методист Черкаського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних працівників;

Лискова С.М., методист методичного кабінету відділу освіти Золотоніської міської ради, вчитель математики вищої кваліфікаційної категорії спеціалізованої школи № 2 інформаційних технологій м. Золотоноші;

Чамата С.О., вчитель математики вищої кваліфікаційної категорії, вчитель-методист загальноосвітньої I-III ст. школи № 5 м. Золотоноші.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Бей О. Я., вчитель математики вищої категорії, старший учитель гімназії ім. С.Д.Скляренка м. Золотоноші, керівник міського методичного об'єднання вчителів математики

У пропонованому посібнику представлено програму організації роботи гуртка в 5-6 класах (орієнтовно 1 година на тиждень, всього – 35 годин), орієнтовне календарне планування та основні питання роботи гуртка «Математична логіка».

Матеріал розбито на теми. Важливими темами є «Подільність чисел», «Комбінаторні задачі», «Задачі-забави», «Задачі-казки», «Принцип Діріхле», «Кола Ейлера», «Софізми», «Математична мозаїка» та інші. Кожна тема містить короткі теоретичні відомості, задачі, їх розв'язки, вказівки, відповіді.

Посібником можуть користуватися вчителі для підготовки занять математичних гуртків, проведення математичних змагань, вікторин і на уроках.

Рекомендовано вчителям, керівникам математичних гуртків та учням 5-6 класів загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, гімназій.

Матеріали схвалені вченою радою ЧОПОПП
протокол № _____ від _____

Пояснювальна записка	4
Програма гуртка	6
Календарне планування	8
Методичні рекомендації до проведення занять:	
1. <i>Вступ</i>	9
1.1. Предмет „логіка”, „математична логіка”	9
1.2. Задачі-забави.....	10
1.3. Задачі-казки.....	14
1.4. Задачі-загадки	18
1.5. Задачі на рух	20
2. <i>Основні типи логічних задач</i>	27
2.1. Подільність чисел.....	27
2.2. Властивості цілих чисел.....	33
2.3. Задачі на переливання та зважування.....	34
2.4. Метод таблиць і графів.....	36
2.5. Принцип Діріхле.....	38
2.6. Кола Ейлера.....	39
2.7. Комбінаторні задачі.....	41
3. <i>Математична мозаїка</i>	45
3.1. Математичні ігри.....	45
3.2. Математичні фокуси.....	49
3.3. Софізми.....	53
3.4. Математика + література = ?.....	57
3.5. Годинник і календар.....	62
3.6. Математична вікторина	66
3.7. КВВ	70
Література	73

Через шкільну математику лежить шлях до широкого ознайомлення з досягненнями сучасної математичної науки, яка в наш час особливо бурхливо розвивається. Ознайомлення з її досягненнями навіть у загальних рисах пробуджує в учнів бажання до творчих шукань, до глибокого пізнання і оволодіння математичними знаннями. Учні пересвідчуються і в тому, що розвиток математики зумовлений самим життям, яке висуває дедалі нові завдання в усіх галузях людської діяльності, спонукає до шукання нових шляхів, нових відкриттів.

Основною формою позакласної роботи з математики у 5-6 класах є математичні гуртки. Заняття в гуртку доповнюють роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та запити учнів, які виходять за межі навчальної програми. У гуртках учні розширюють і поглиблюють набуті знання з математики, навчаються працювати над математичними проблемами, читати математичну літературу. Це сприяє підвищенню їх математичної культури, розширенню математичного кругозору і дальшому посиленню інтересу до математики.

Метою додаткової шкільної математичної освіти є:

- ❖ Формування знань, умінь і навичок, необхідних для успішного вивчення математики та інших наук;
- ❖ Формування в школярів інтересу до математики та її застосування, до занять математикою;
- ❖ Розвиток математичних здібностей учнів, логічного, комбінаторного, нестандартного мислення, навичок самостійної роботи, роботи з книжкою;
- ❖ Поглиблення і розширення знань учнів з математики, міцного і свідомого їх засвоєння;
- ❖ Підвищення математичної культури.





Робота в гуртку, проведення математичних вечорів та інші види позакласної роботи сприяють вихованню в учнів почуття колективізму, розвитку особистості.

Математичні гуртки готують учнів до участі в математичних олімпіадах, які виявляють талановитих юнаків і дівчат.

Велике значення у справі заохочення учнів до позакласних занять з математики мають історичні задачі, біографічні відомості про видатних учених. Життя і діяльність багатьох вітчизняних математиків дають чудовий матеріал для розвитку в учнів почуття патріотизму.

Організувавши математичний гурток, слід особливу увагу приділяти тим формам гурткових занять, які дають можливість переважній більшості учнів проявити свою ініціативу і розраховані на активну творчу роботу всіх його членів.

У пропонованому посібнику для 5-6 класів представлено:

-  програму організації роботи гуртка «Математична логіка», розраховану на 35 годин (1 година на тиждень);
-  орієнтовне календарне планування;
-  методичні рекомендації для проведення занять гуртка;
-  запропоновані учням теми для індивідуальної початкової наукової діяльності (виступи, повідомлення, реферати, творчі завдання).

Програму розбито на три основні частини – «Вступ», «Основні типи логічних задач», «Математична мозаїка». Вони включають в себе теми, найбільш важливими з яких є: «Подільність чисел», «Властивості цілих чисел», «Комбінаторні задачі», «Принцип Діріхле», «Кола Ейлера», «Софізми», «Математичні ігри та фокуси». Кожна тема містить короткі теоретичні відомості.

Велике місце в розвитку математичного мислення, уяви, кмітливості, пам'яті посідають різноманітні задачі й головоломки. Дітям пропонуються задачі-забави, задачі-казки, задачі-загадки, комбінаторні задачі, задачі на переливання та зважування, народні задачі та інше. До них є розв'язки, вказівки, відповіді.

Враховано те, що чим цікавіша форма навчання, тим ефективніші його результати, тим легше вчитися.

Посібником можуть користуватися вчителі для підготовки занять математичних гуртків, проведення математичних змагань, вікторин і на уроках.

Рекомендовано вчителям математики та учням 5-6 класів загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, гімназій, керівникам математичних гуртків.

	Зміст матеріалу	К-сть годин	Основні вимоги до підготовки учнів
1.	Вступ. 1.1. Предмет „логіка”, „математична логіка”; 1.2. Задачі-забави; 1.3. Задачі-казки; 1.4. Задачі-загадки; 1.5. Задачі на рух.	8	Учні мають <i>знати</i> : що таке предмет „логіка”, „математична логіка”, що він вивчає; <i>вміти</i> : пояснити поняття «логіка», «математична логіка», розв’язувати і складати задачі, задачі-казки, задачі-загадки, задачі на рух.
2.	Основні типи логічних задач: 2.1. подільність чисел; 2.2. властивості цілих чисел; 2.3. задачі на переливання та зважування; 2.4. метод таблиць і графів; 2.5. принцип Діріхле; 2.6. кола Ейлера; 2.7. комбінаторні задачі.	16	Учні мають <i>знати</i> : прості і складені числа, принцип Діріхле, що таке кола Ейлера, ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, метод таблиць і графів; <i>вміти</i> : розв’язувати вправи, що передбачають використання властивостей цілих чисел, ознак подільності чисел, наводити приклади простих і складених чисел; чисел, що діляться націло на 2, 3, 4...; формулювати означення понять, розв’язувати задачі на переливання, зважування, комбінаторні задачі.

3.	Математична мозаїка: 3.1. математичні ігри; 3.2. математичні фокуси; 3.3. софізми; 3.4. математика + література; 3.5. годинник і календар; 3.6. математичні вікторини; 3.7. КВВ.	11	Учні мають <i>знати</i> : правила математичних ігор, фокусів, що таке софізми, взаємозв'язок між математикою та іншими науками; <i>вміти</i> : розв'язувати задачі, пов'язані з годинником і календарем, доводити помилковість софізмів, показувати математичні фокуси, брати участь в проведенні математичних вікторин, КВВ.
----	---	-----------	---

ДОДАТОК. Індивідуальна творча робота учнів: твір – мініатюра „Подорож до країни Математики”, короткі повідомлення, реферати про життя видатних математиків, складання математичних казок, задач, загадок, запитань тощо.

№	Тема заняття	Кількість годин	Дата проведення	Прим.
1.	ВСТУП.	8		
1.1.	Предмет „логіка”, „математична логіка”.	1		
1.2.	Задачі-забави.	2		
1.3.	Задачі-казки.	2		
1.4.	Задачі-загадки.	1		
1.5.	Задачі на рух.	2		
2.	ОСНОВНІ ТИПИ ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ.	16		
2.1.	Подільність натуральних чисел.	3		
2.2.	Властивості цілих чисел.	2		
2.3.	Задачі на переливання та зважування.	2		
2.4.	Розв’язування логічних задач методом таблиць і графів.	2		
2.5.	Принцип Діріхле.	2		
2.6.	Кола Ейлера.	2		
2.7.	Комбінаторні задачі.	3		
3.	МАТЕМАТИЧНА МОЗАЇКА	11		
3.1.	Математичні ігри.	2		
3.2.	Математичні фокуси.	2		
3.3.	Софізми.	1		
3.4.	Математика + література = ?	2		
3.5.	Годинник і календар	2		
3.6.	Математичні вікторини.	1		
3.7.	КВВ	1		

1. ВСТУП

1.1. Предмет „логіка”. Математична логіка

У праці, навчанні, грі, у всякій творчій діяльності людині потрібні винахідливість, догадка, уміння міркувати – все те, що і є логічним мисленням. Логіку можна виховати і розвинути систематичними і поступовими вправами, зокрема розв’язуванням математичних задач.

*Не все на світі просто, але є
Якась закономірність саме в тому,
Що істина раптово постає
Крізь ліс ускладнень, в самому простому.*

Віталій Коротич

Термін «логіка» походить від грецького слова «логос», яке перекладається на українську мову, як «слово», «мисль», «поняття», «розум», «закономірність». Уперше термін «логіка» ввів у науку давньогрецький філософ Демокріт (близько 460-370 р.р. до н.е.), назвавши свою працю «Про логічне, або про правила». А засновником логіки як науки про закони мислення вважається старогрецький філософ Аристотель (384-322 р.р. до н.е.), який у своїх творах уперше сформулював правила і розглянув різні форми мислення.

Логіка – це наука про мислення. Але таке визначення логіки було б досить широким. Мислення – явище складне, різнобічне, є предметом вивчення багатьох наук, зокрема, математики.

Коли кажуть, що «мислення логічне», «в його міркуваннях залізна логіка», та ін., то це означає, що мислення вирізняється зв’язністю, визначеністю, послідовністю.

Якщо говорять, що «його міркуванням бракує логіки», «йому бракує логіки», «де ж логіка?» і т.д., то це означає, що мислення є безладне, непослідовне, суперечливе, тобто нелогічне.



Логічна грамотність – необхідна риса освіченості. Людина у своїй діяльності широко користується такими логічними категоріями, як поняття, судження, умовивід, дедукція, індукція, аналогія, версія, доказ, заперечення, знання яких значно підвищують культуру мислення. Наука «математична логіка» навчає як правильно будувати умовиводи, прищеплює вміння оперувати математичними поняттями і судженнями, застерігає від можливих логічних помилок.

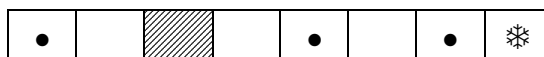
«Математика навчає точності думки, підкоренню логіці доведень, поняттю строго орґрунтованої істини, а все ж формує особистість, мабуть, більше, ніж музика» (О. Д. Александров).

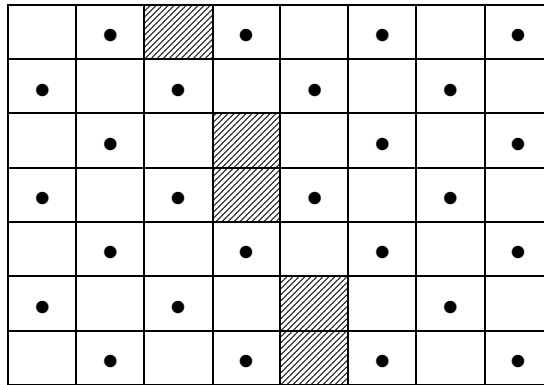
Для розвитку математичного мислення, уяви, кмітливості, пам'яті широко використовуються задачі й головоломки. Дітям пропонуються задачі-забави, задачі-казки, задачі-загадки, які оперують з невеликими числами. На зміну їм прийдуть складніші задачі, у яких підрахунки ускладнюються.

1.2. ЗАДАЧІ-ЗАБАВИ

Розв'язування задач „забавного” характеру спирається на догадку або на безпосередні фізичні дії (експеримент), іноді на нескладні розрахунки в межах арифметики цілих і дробових чисел. Можна перевірити і поправити свою кмітливість спочатку на таких задачах, для розв'язання яких потрібні тільки цілеспрямована наполегливість, терпіння, кмітливість і вміння додавати, віднімати, множити і ділити цілі числа.

1. У кошику лежить 5 яблук. Як поділити ці яблука між п'ятьма дівчатками, щоб кожна дівчинка одержала по одному яблуку і щоб одне яблуко лишилося у кошику?
2. Скажіть, скільки в кімнаті котів, якщо в кожному з чотирьох кутків кімнати сидить по одному коту, проти кожного kota сидить по 3 коти і на хвості в кожного kota сидить по коту?
3. На рисунку подано план невеликого яблуневого саду (крапки – яблуні).



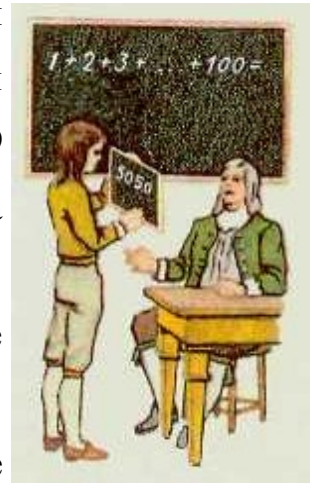


Садівник обробив усі яблуні підряд. Він почав з клітинки, позначеної зірочкою, і обійшовши одну за одною всі клітинки, як під яблунями, так і вільні, ні разу при цьому не повертаючись на пройдену клітку. По діагоналях він не ходив і на заштрихованих клітках не був, бо там містились різні будівлі. Закінчивши обхід, садівник опинився на тій самій клітці, з якої почав свій шлях. Накресліть у своєму зошиті шлях садівника.

4. У квадратному залі для танців поставили вздовж стін 10 крісел так, щоб біля кожної стіни стояло крісел порівну?
5. Коли моєму батькові був 31 рік, мені було 8 років, а тепер батько старший за мене вдвоє. Скільки років мені тепер?
6. У хлопчика стільки ж сестер, скільки й братів, а в його сестри вдвоє менше сестер, ніж братів. Скільки у цій сім'ї братів і скільки сестер?
7. Користуючись тільки додаванням, запишіть число 28 за допомогою п'яти двійок, а число 1000 за допомогою восьми вісімок.
8. За допомогою будь-яких арифметичних дій складіть число 100 або з п'яти одиниць, або з п'яти п'ятірок, причому з п'яти п'ятірок 100 можна скласти двома способами.
9. У вагоні електропоїзда їхали з міста на дачу дві подруги-учениці.
 — Я помічаю, — сказала одна з подруг, — що зустрічні дачні поїзди проходять повз нас через кожні 5 хвилин. Як ти гадаєш, скільки дачних поїздів прибуває до міста протягом однієї години, якщо швидкості поїздів в обох напрямках однакові?
 — Звичайно, 12, бо $60 : 5 = 12$, — сказала друга подруга.

Але учениця, яка дала запитання, не погодилась з розв'язком подруги і навела їй свої міркування. А що ви думаєте з цього приводу ?

10. Розповідають, що коли 9-річному Гауссу (видатний німецький математик) учитель запропонував знайти суму всіх чисел від 1 до 100, $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, то маленький Гаусс сам зміркував, як можна дуже швидко виконати це додавання. Подумайте і ви!



11. Четвертина деякого числа дорівнює половині. Яке це число ?

12. Третина моїх олівців це 12 олівців. Скільки в мене олівців?

13. Проїхавши половину всього шляху, пасажир ліг спати і спав доти, доки не лишилось їхати половину того шляху, який він проїхав спавши. Яку частину всього шляху він проїхав спавши?

14. Два поїзди йдуть один одному назустріч по паралельних коліях; один із швидкістю 36 км/год, другий із швидкістю 45 км/год. Пасажир з другого поїзда помітив, що перший поїзд йшов повз нього протягом 6 секунд. Яка довжина першого поїзда?

15. Якщо деяке число помножити на 5, потім від добутку відняти 10, остачу розділити на 3, і помножити на 10, то ми отримаємо 300. Яке число задумали?

16. Сергій живе на вулиці, будинки якої занумеровані підряд числами від 1 до 24. Скільки разів цифра 2 повторюється у нумерації?

17. Скільки потрібно цифр для нумерації сторінок книги, у якої 232 сторінки? (Вважати, що перша сторінка теж нумерується.)

18. Нумеруючи сторінки зошита, використали 411 цифр. Скільки сторінок у зошиті?

19. 28 дітей брали участь у змаганнях з бігу. Кількість дітей, котрі прибігли пізніше від Дмитра, вдвічі більше за кількість дітей, котрі прибігли швидше, ніж Дмитро. Яким прибіг Дмитро?

20. Розглянемо число 1232123212321..., що складається із 1000 цифр. Які три останні цифри?
21. У кожному під'їзді, на кожному поверсі 16-поверхового будинку є по чотири квартири. У якому під'їзді і на якому поверху є квартира № 165?
22. Два кота за дві години з'їдають дві миші. Скільки мишей з'їдять 10 котів за 10 годин?
23. На питання: „Скільки у вас яблук?“, жінка відповіла: „Якби до моїх яблук прибавити половину та ще десяток яблук, то вийде ціла сотня“. Скільки яблук було у жінки?
24. Білий ведмідь на 600 кг важчий за лева. Це у 5 разів більше. Скільки важить ведмідь, а скільки лев?
25. Онук запитав у дідуся: “Скільки тобі років?”. Дідусь відповів: “Я Якщо я проживу ще половину того, що прожив, та ще 1 рік, то мені буде 100 років”. Скільки років дідусеві?
26. У скільки разів половина більша за свою половину?
27. Як записати нуль трьома п'ятірками: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 0$?
28. Летіли горобці і сіли на стовпці, як сіли по одному – один горобець зайвий, як сіли по два – один стовпець зайвий. Скільки горобців і скільки стовпців?
29. Що більше: сума всіх одноцифрових натуральних чисел чи їх добуток?
30. Продовжити ряд чисел: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...

ВІДПОВІДІ:

- | | | |
|-------------------|--------------|---------------------------|
| 2. 4 кота | 5. 23 роки | 6. 4 брата і 3 сестри |
| 9. 13 поїздів | 11. 2 | 12. 36 олівців |
| 13. Третину шляху | 14. 135 м | 15. 20 |
| 16. 8 разів | 17. 498 цифр | 18. 173 сторінки |
| 19. Десятим | 20. 232 | 21. 3 під'їзд, 9 поверх |
| 22. 50 мишей | 23. 60 яблук | 24. 750 кг, 150 кг |
| 25. 66 років | 26. В 2 рази | 28. 4 горобця і 3 стовпця |

1.3. ЗАДАЧІ-КАЗКИ

Золото царя Додона

Шість розбійників обікрали царя Додона. Здобич була багатою — менш ніж сто однакових злитків. Почали розбійники ділити здобич, але один злиток виявився зайвим. Розбійники почали сваритися та в бійці одного розбійника вбили. Знову стали ділити золото, але знову один злиток виявився зайвим. Знову в бійці загинув один розбійник. Так було доти, доки врешті-решт залишився тільки один розбійник, який також помер від ран. Скільки злитків було?

Розв'язування. Якщо спочатку було b на один злиток менше, то поділ відбувся. Число менше за 100, що ділиться на 2, 3, 4, 5, 6,— це число 60. Усього було $60 + 1 = 61$ злиток золота.

Маленький Мук та королівський скороход

Маленький Мук та королівський скороход змагалися з бігу по доріжці довжиною 30 км, яка пролягла навколо великої галявини. За умовою, змагання виграє той, хто обжене іншого та пробіжить на коло більше. Скороход пробігає коло за 10 хв, а Маленький Мук — за 6 хв. Обидва біжать рівномірно. Через скільки хвилин Маленький Мук обжене скорохода?

Розв'язування. Швидкість Маленького Мука $30 : 6 = 5$ км/хв, а скорохода $30 : 10 = 3$ км/хв. Коли змагання почалися, то Маленький Мук став обганяти скорохода на $5 - 3 = 2$ км/хв. Тому Маленький Мук обжене скорохода через $30 : 2 = 15$ хв.

Старий Хоттабич

Вік старого Хоттабича записується різними цифрами. Про це число відоме наступне:

- 1) якщо першу та останню цифри закреслити, то отримається двозначне число, яке при сумі цифр 13, є найбільшим;
- 2) перша цифра більша за останню в 4 рази. Скільки років старому Хоттабичу?

Розв'язування. Найбільшим двозначним числом з сумою цифр 13 є число 94. Нехай остання цифра 1. Тоді перша 4, але така цифра вже є. Нехай остання

цифра 2, тоді перша 8. Всі цифри різні, отримали 8942. Якщо остання цифра 3, то перша 12. Таке неможливо.

Хоттабичу 8942 роки.

Сьома мандрівка Синдбада

Синдбад-мандрівник потрапив на острів. На ньому живуть тільки правдолюби (вони говорять тільки правду) та брехуни (вони тільки брешуть). Синдбада супроводжував житель цього острова. Скоро вони побачили ще одного жителя. Синдбад послав свого проводиря дізнатися, хто той житель — правдолюб, чи брехун. Проводир повернувся та сказав, що той каже, що він брехун. Ким був проводир — правдолюбом чи брехуном?

Розв'язування. Якщо житель був правдолюбом, то він про це сказав би проводирю. Якщо житель острова був брехун, то він також сказав, що він правдолюб. Таким чином відповідь про жителя — правдолюб. Проводир сказав Синдбаду, що житель — брехун. Тому проводир — брехун.

Хто переміг Змія Горинича

«Змія Горинича перемогли», — така чутка дійшла до Микули Селяниновича. Він знав, що це міг зробити один з богатирів: Ілля Муромець, Альоша Попович, Добриня Микитович.

Скоро Микулі доповіли:

- 1) Змія Горинича переміг не Ілля Муромець;
- 2) Змія Горинича переміг Альоша Попович.

Через деякий час з'ясувалося, що одне з цих тверджень хибне, а друге — істинне. Хто ж переміг Змія Горинича?

Розв'язування:

- 1) Припустимо, що переможцем був Ілля Муромець. Тоді обидва повідомлення хибні, це не відповідає умові задачі.
- 2) Припустимо, що переможцем був Альоша Попович. Тоді обидва повідомлення правильні, це не відповідає умові задачі.
- 3) Припустимо, що переможцем був Добриня Микитович. Тоді перше повідомлення істинне, а друге ні.

Нільс та гуси

Нільс летів у зграї на спині гусака Мартина. Він звернув увагу, що зграя нагадує трикутник: попереду вожак, потім два гусаки, у третьому ряду — три і т.д. Зграя зупинилась на ночівлю на крижині. Нільс побачив, що розташування гусей цього разу нагадує квадрат, що створено з рядів, у кожному однакова кількість гусей, причому кількість гусей у кожному ряду дорівнює кількості рядів. Гусей в зграї менш ніж 50. Скільки гусей у зграї?

У селі Простоквашино

У селі Простоквашино на лавці перед будинком сидять дядя Федір, кіт Матроскін, пес Шарик та листоноша Печкін. Якщо Шарик, що сидить крайнім зліва, сяде між Матроскіним та Федором, то Федір виявиться крайнім зліва. Хто де сидить?

Володар і мудреці

Володар захотів випробувати мудреців і сказав їм: «Перед вами три ковпаки: один чорний і два білих. На вас одягнуть по ковпаку, хто з вас першим здогадається, якого кольору на ньому ковпак?» Мудреців завели в темну кімнату і там наділи білі ковпаки. Потім привели їх назад. Довго вони дивились одне на одного. Один з них вигукнув: «На мені білий ковпак!» Як він міркував?

Кмітливість коваля Хечо

(стародавня грузинська задача)

Давно-давно жив у Грузії князь злий і гордовитий. Була у князя дочка— дівчина на виданні, Дариджан на ім'я. Обіцяв князь свою Дариджан видати за багатого сусіда, а вона покохала простого хлопця, коваля Хечо. Спробували були Дариджан і Хечо втекти в гори від неволі, але спіймали їх слуги князьові.

Розлютувався князь і вирішив на завтра стратити обох, а на ніч наказав замкнути їх ось у цю високу, похмуру, покинуту, недобудовану башту, а разом з ними ще й служницю Дариджан, дівчинку-підлітка, яка допомагала їм тікати.

Не розгубився у башті Хечо, оглянувся, піднявся по східцях у верхню її частину, у вікно виглянув — стрибати не можна, розіб'єшся. Тут помітив Хечо біля вікна покинуту будівельниками мотузку, перекинуту через заржавлений

блок, укріплений над вікном. До кінців мотузки були прив'язані порожні корзини, до кожного кінця — по корзині. Хечо згадав, що в цих корзинах муляри піднімали вгору цеглу, а вниз опускали щебінь, причому якщо вага вантажу в одній корзині була більша від ваги вантажу у другій приблизно на 5—6 кг (у сучасних мірах), то корзина досить плавно опускалась на землю; друга корзина в цей час піднімалась до вікна.

Хечо на око визначив, що Дариджан важить близько 50 кг, служниця не більше як 40 кг. Свою вагу Хечо знав — близько 90 кг. Крім того, він знайшов у башті ланцюг вагою 30 кг. Оскільки у кожній корзині могла вміститись людина і ланцюг або навіть 2 людини, то їм усім трьом удалось спуститись на землю, причому спускались вони так, що жодного разу вага корзини з людиною, яка опускалась, не перевищувала ваги корзини, яка піднімалась, більш як на 10 кг.

Як вони вибрались з башти?

Східна казка

Дуже давно на Сході жив-був чоловік, який, вмираючи, залишив своїм трьом синам 17 верблюдів. Він заповів старшому синові половину, середньому — третину, молодшому — дев'яту частину.

Не знайшовши розв'язання самостійно (адже задача в цілих верблюдах розв'язку не має), брати звернулися до мудреця.

— О мудрий! — сказав старший брат. — Батько залишив нам 17 верблюдів і велів розділити між собою таким чином... Але 17 не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 9. Чи зможеш ти, о вельмиповажний, допомогти нашій біді, бо ми хочемо виконати волю батька?

— Нема нічого простішого, — відповів мудрець, — якщо до 17 ваших чудових приєднати ще й мого старенького верблюда. Ось слухайте.

Брати слухали й дуже дякували мудрецю, який задовольнив всі умови батьківського заповіту і не випадково, замість свого старенького, сів, щоб їхати далі, на найкращого з верблюдів. Як розділив мудрець спадщину?

Розв'язання. Батько склав заповіт непередбачливо: сума частин $1/2 + 1/3 + 1/9$ становить не одиницю, а $17/18$. Точне виконання заповіту, якщо не рахуватися з

вимогами доцільності і практичної реалізації, передбачає передачу старшому синові $17/2$ верблюда, середньому $17/3$, молодшому $17/9$, що становить $289/18 = 16 \frac{1}{18}$, а $17/18$ від одного верблюда залишаються поза розподілом. Мудрець підмінив умови заповіту, приєднавши до спадщини свого верблюда. Тоді старший отримав $1/2 \cdot 18 = 9$, середній — $1/3 \cdot 18 = 6$, а молодший — $1/9 \cdot 18 = 2$ верблюди. Але такий розв'язок не є точною реалізацією заповіту, а лише доцільним наближенням до його вимоги. Старший син фактично отримав більше на $9 - 17/2 = 1/2$ верблюда, середній на $6 - 17/3 = 1/3$, а молодший на $2 - 17/9 = 1/9$. Ці надбавки в сумі вичерпують $17/18$ верблюда, які згідно із заповітом залишилися поза розподілом.

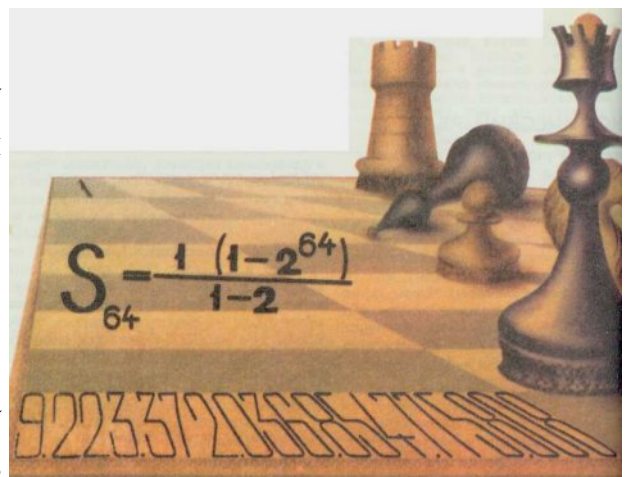
1.4. ЗАДАЧІ-ЗАГАДКИ

«Народ скаже, як зав'яже»

Учені виявили в народній математиці задачі, які прийшли з глибокої давнини і буквально мандрували по світу від одного народу до іншого. Ці витвори **народної** мудрості не втратили свого освітнього потенціалу і в наш час. Вони не музейні експонати історії, а все ще активні трудівники.

Деякі з цих задач пропонуємо увазі наших читачів.

1. Пасли два хлопці поросят, і один каже другому: «Дай мені одне порося, то в нас буде порівну». А другий каже: «Дай ти мені одного, то в мене буде якраз вдвічі більше, як у тебе». По скільки було в них поросят?
2. П'ять, п'ятнадцять, без двох двадцять, семеро, троє, ще й малих двоє. Скільки всіх?
3. Як сорок п'ять горіхів розкласти на дев'ять тарілок так, щоб у кожній була різна кількість горіхів?
4. Летіли гуси, а назустріч одна: «Добрідень, сто гусей!» — каже. «Нас не сто, а щоб було сто, треба ще стільки, та півстільки, та чверть



- стільки і ти одна». Скільки летіло гусей?
5. Сто кіп собак, скільки в них лап?
 6. Знайшли гривеника й поділили: чоловікам по півтори копійки, жінкам по копійці, а дітям по чверті копійки. Скільки було чоловіків, жінок і дітей?
 7. Ішло сім сестриць, несло по сім палиць, на кожній палиці по сім сучків, на кожному сучку по сім торбин, у кожній торбині по сім паляниць. Скільки всіх паляниць?
 8. Стоїть стовп, а на стовпі сорок кілець, до кожного кільця прив'язано по 40 кобил, у кожної кобили 40 лошат. Скільки всього лошат?
 9. Мірошник розділив 100 мір пшениці на три частини, щоб навантажити на коня, осла й ослика. Якщо від вантажу коня відняти один вантаж осла, то решту ослик може перевезти за шість прийомів, а якщо відняти два вантажі осла, то решту ослик зможе перевезти в чотири прийоми, а на п'ятий залишиться вантаж, на половину менший, ніж кожен із попередніх чотирьох. Скільки мір зерна навантажив мірошник на коня, осла і ослика?
 10. Дочки Навасарда були килимарки. Якби Навасард дав кожній дочці по сім мотків ниток без одного, то в нього ще лишилась би така сама частина мотків. А якби він дав кожній по сім і ще по одному мотку, то одній дочці ниток не дісталось б зовсім. Скільки дочок і скільки мотків ниток було в Навасарда?

ВІДПОВІДІ:

- | | | |
|------------------------|-------------|---------------------------------|
| 1. 5 і 7 | 2. 50 | 3. 1, 2, 3, ..., 9 |
| 4. 36 гусей | 5. 24 000 | 6. 1 чол., 5 жін., 14 діт. |
| 7. $7^5 = 16\,807$ | 8. за 4 дня | 9. Сто мір пшениці; 75, 15, 10. |
| 10. 7 дочок, 48 мотків | | |

1.5. ЗАДАЧІ НА РУХ НАЗУСТРІЧ І НАВЗДОГІН

1. Літак летить із швидкістю 600 км за годину. Скільки кілометрів він пролетить за дві з половиною години?
2. Пішохід іде з швидкістю 6 км за годину. Більше чи менше 1 м за секунду проходить пішохід?
3. Автомобіль виїхав з села о 10 год ранку і приїхав у місто о 2 год того ж дня. Яка відстань від села до місти, якщо автомобіль їхав із швидкістю 60 км за год?
4. Вершник проїхав відстань між двома містами за 4 год. За скільки годин проїде більшу в 8 раз відстань вантажний автомобіль, якщо його швидкість у 4 рази більша, ніж швидкість вершника?
5. Від села до пристані 125 км. О котрій годині треба виїхати мотоциклом із села, щоб встигнути на теплохід, якщо їхати із швидкістю 50 км за годину?
6. Від Києва до Сімферополя літак летів 1 год 20 хв, а із Сімферополя до Києва 80 хв. Коли швидкість літака була більша, якщо відстань між містами 720 км?
7. Хлопчик виїхав на риболовлю велосипедом о 8 год ранку. Він їхав рівномірно і проїхав 25 км. Коли хлопчик прибув на місце, якщо швидкість його руху 10 км за годину?
8. З міста в село виїхав велосипедист. Він їхав із швидкістю 15 км за годину. Одночасно з ним із села в місто виїхав вершник. Швидкість його руху — 12 км за годину. І вони зустрілися через дві години. Хто з них був далі від міста?
9. Пароплав рухається за вітром. Вітер дме з швидкістю 20 км за годину. Що пиз на сказати про швидкість пароплава?
10. Швидкий поїзд ішов з міста А до міста Б без зупинок. Швидкість його 75 км за годину. Другий поїзд вийшов йому назустріч із міста Б і також ішов без зупинок із швидкістю 60 км за годину.
Яка відстань між поїздами буде за 1 годину до їх зустрічі?

11. Два товарні поїзди, завдовжки по 240 м кожний, їдуть назустріч один одному зі швидкістю 20 м за секунду. Скільки секунд мине від зустрічі машиністів до зустрічі кондукторів останніх вагонів?
12. Електропоїзд з дев'яти вагонів пройшов повз спостерігача за 12 сек. З якою швидкістю рухався поїзд, якщо довжина кожного вагона 16 м?
13. Два велосипедисти, відстань між якими 120 км, їхали назустріч один одному з однаковою швидкістю. Яка швидкість кожного велосипедиста, якщо вони зустрілися через 5 годин?
14. О 9 годині ранку велосипедист виїхав на шосе і помітив на кілометровому стовпі число 297. О 12 годині дня він спинився перепочити біля 339-кілометрового стовпа. За скільки годин він проїде решту шляху — 28 км, якщо їхатиме з такою самою швидкістю?



297

339

367



15. З протилежних берегів ставка одночасно відпливли назустріч один одному два плавці. Перший пливе із швидкістю 40 м за хвилину, другий — 60 м за хвилину. Між плавцями з моменту їх відправлення курсує моторний човен — від першого плавця до другого і назад і т. д. Швидкість човна — 24 км за годину. Яку віддаль пройшов човен до зустрічі плавців, якщо відстань між берегами у цьому місці дорівнює 600 м?
16. Два хлопчики з однаковою швидкістю (80 м за хв) вийшли назустріч один одному. Відстань між ними була 960 м. З одним хлопчиком був Собака,

який біг у 4 рази швидше, ніж ішов хлопчик. Собака бігав від одного хлопчика до другого, а потім назад.

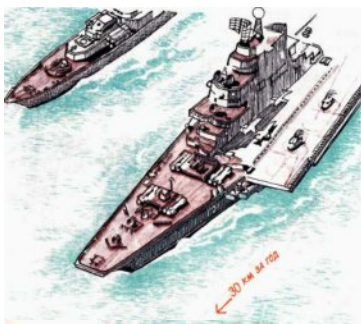
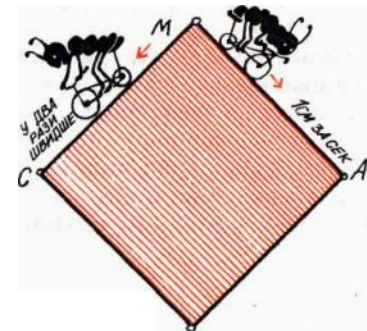
Скільки метрів пробіг собака, поки хлопчики йшли назустріч один одному?

17. З станції вийшов електропоїзд з швидкістю 60 км за годину. Через три години з тієї ж станції в тому самому напрямі вийшов другий електропоїзд. З якою швидкістю має їхати другий електропоїзд, щоб догнати перший за 6 годин?

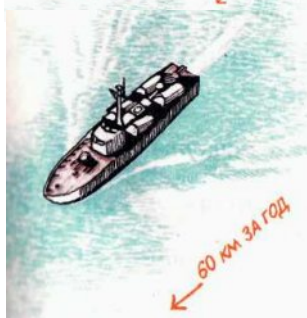
18. Від причалу вниз по річці пустили пліт, який рухається із швидкістю 4 км за годину. Через три години за ним вийшов буксир. Його власна швидкість — 6 км за годину. Через скільки годин буксир дожене пліт?

19. *Старовинна задача.* Відстань між столичним містом і селом 588 км. Подорожній, що йде з села до міста, проходить цю відстань за 21 день, а другий подорожній, який йде з міста в село, проходить її за 28 днів. Обидва подорожні вийшли одночасно. На який день вони зустрінуться?

20. Сторона квадрата 20 см. У вершині М цього квадрата знаходяться дві мурашки. Вони одночасно по чали рухатися у різних напрямках по межі квадрата. Одна повзе із швидкістю 1 см за секунду, а друга в 2 рази швидше. Яка відстань буде між ними через 21 сек?



21. Катеру-розвіднику, який рухався в складі ескадри, дано завдання обстежити район моря на 120 км в напрямку руху ескадри. Швидкість ескадри — 36 км за годину, а швидкість катера — 60 км за годину. Через скільки годин катер повернеться до ескадри?



22. Михайлик і Віталій вийшли назустріч один одному із двох сіл, відстань між якими 20 км. Швидкість Михайлика 6 км/год, а Віталія — 4 км/год. Одночасно з Михайликом назустріч Віталію вилетіла муха, долетівши до Віталія, вона розвернулася і полетіла до Михайлика і так літала між ними

доти, доки вони не зустрілися. Скільки кілометрів налітала муха, якщо її швидкість 11 км/год?

Розв'язання: Звичайно, при розв'язуванні цієї задачі можна вдатися до підрахунку відстаней, які щоразу пролітала муха. Однак є більш зручний спосіб розв'язання, адже насправді муха літала стільки часу, скільки витратили наші герої, щоб зустрітися, тобто $20 : (6 + 4) = 2$ години. Знаючи, що швидкість мухи становила 11 км/год, легко підрахувати, що відстань, яку вона пролетіла, дорівнює $2 * 11 = 22$ км.

23. Якщо Маруся йде до школи пішки, а назад їде автобусом, то всього на дорогу вона витрачає 1,5 год. Якщо ж вона до школи і назад їде, то весь шлях займає в неї 30 хв. Скільки часу витратить Маруся на дорогу, якщо йтиме пішки до школи і назад?

Відповідь: 2,5 години.

24. Катер долає шлях АВ проти течії за 4 год. 30 хв, а шлях ВА (за течією) — за 3 год. Скільки часу плистиме від В до А пліт?

Відповідь: 18 годин.

25. Автомобіль проїхав від А до В зі швидкістю 40 км/год, а назад — зі швидкістю 60 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

Вказівка: нагадуємо, що середня швидкість — це відношення загальної відстані до часу, що витрачено на рух.

Відповідь: 48 км/год.

26. Якось Михайлик о шостій годині ранку вирушив у похід. О шостій годині вечора він дістався кінця свого маршруту, заночував і о шостій годині ранку наступного дня вирушив назад. Додому він повернувся о шостій годині вечора. Доведіть, що незалежно від швидкості руху, знайдеться таке місце на шляху Михайлика, де він був в один і той же час на прямому і зворотному шляху.

Відповідь: Припустимо, що замість Михайлика, який йде туди і назад, у нас є два мандрівники, які вийшли назустріч один одному за тим же маршрутом о шостій ранку і прийшли до пунктів призначення одночасно — о шостій

вечора. Зрозуміло, що вони обов'язково зустрінуться. Місце, де вони зустрінуться, і є шуканим. Зауважимо, що таке розв'язання дозволяє лише відповісти на питання про існування такого місця, але не дає змоги його відшукати.

27. Від Іванівки до Петрівки 15 кілометрів. З Іванівки до Петрівки о 9 год 30 хв вирушив пішохід, що йшов зі швидкістю 4 км/год. Наступного дня об 11 годині він вирушив назад зі швидкістю 5 км/год. Обидва рази він проходив по мосту, що знаходився на цій дорозі, в один і той же час. Визначте, о котрій годині він проходив міст.

Відповідь: Першого дня до 11-ї години пішохід пройшов $4 \cdot 1,5 = 6$ км. Тепер можна вважати, що два пішоходи вийшли об 11-й ранку назустріч один одному з двох сіл, відстань між якими 9 км зі швидкостями 4 і 5 км/год. Вони зустрінуться через $9 : (4 + 5) = 1$ год. На мосту вони будуть через годину після-11, тобто о 12-й годині.

28. За начальником одного з відділів зранку заїжджала машина і привозила його на роботу у визначений час. Якось начальник вирішив прогулятися. Він вийшов за годину до приходу машини і пішов пішки їй назустріч. Дорогою він зустрів машину і прибув на роботу на 20 хвилин раніше, ніж звичайно. Скільки часу тривала прогулянка?

Розв'язання: 20 хвилин, які зекономив начальник, — це час, за який машина могла б доїхати від місця зустрічі з начальником і повернутися назад. Тобто зустріч відбулася на 10 хвилин раніше, ніж звичайно. Оскільки начальник вийшов на годину раніше, прогулянка тривала 50 хвилин.

29. Дорога від школи додому займає в Андрійка 20 хвилин. Одного разу, йдучи до школи, він згадав, що забув дома ручку. Якщо він тепер продовжуватиме йти до школи, то прийде за 3 хвилини до дзвоника, а якщо ж повернеться додому, то запізниться на 7 хв. Яку частину шляху пройшов Андрійко до того, як згадав про ручку?

Відповідь: 0,25 шляху.

30. Мишці до нірки по прямій 20 кроків. Кішці до мишки по тій же прямій 5 стрибків. Поки кішка зробить один стрибок, мишка встигне пройти 5 кроків. При тому один котячий стрибок дорівнює 10 крокам мишеняти. Мишка знаходиться на прямій між кішкою і ніркою. Чи наздожене кішка мишку?

Відповідь: не наздожене.

31. Лисиця знаходиться попереду собаки на 60 своїх стрибків, 3 стрибки собаки дорівнюють 7 стрибкам лисиці. За один і той же час собака робить 6 стрибків, а лисиця — 9. Через скільки стрибків собака наздожене лисицю?

Відповідь: Через 72 стрибки.

32. Знайдіть швидкість і довжину поїзда, якщо він проходить уздовж платформи завдовжки 378 м за 25 секунд, а повз нерухомого пасажира — за 7 секунд.

Розв’язання: Коли поїзд проїжджає уздовж платформи, він долає відстань, яка складається з довжини платформи і його власної довжини, а і коли поїзд проїжджає повз пасажира, він долає відстань, яка дорівнює власній довжині. Тобто довжину платформи він проїжджає за $25 - 7 = 18$ с. Тоді його швидкість $378 : 18 = 21$ м/с, звідки і його довжина $21 \cdot 7 = 147$ м.

33. Поїзд проходить по мосту завдовжки 171 м за 27 секунд, а повз пішохода, що йде назустріч поїзду зі швидкістю 1 м/с, — за 9 секунд. Знайдіть швидкість і довжину поїзда.

Відповідь: 9 м/с.

34. Плiт, що буксирується катером проти течії ріки, проходить уздовж пляжу завдовжки 960 м, за 1 год, а повз мене — за 20 хв. Тріска, що пливе по річці, пропливає 20 м за 25 сек. Обчисліть довжину плота і швидкість, з якою катер тягнув би плiт у стоячій воді.

Відповідь: 240 м, 1 м/с.

35. Два туристи, маючи один велосипед, повинні за півтори години подолати шлях 12 км. Відомо, що на велосипеді кожен із них може рухатися зі швидкістю 20 км/год, а пішки — 5 км/год. Чи зможуть туристи пройти

маршрут без запізнення, якщо на велосипеді одночасно вдвох їхати не можна?

Вказівка: переконайтеся, що загальний час зменшиться, якщо велосипедист не чекатиме на пішохода, а, проїхавши певну відстань, залишить велосипед і далі піде пішки. Спробуйте знайти таке розв'язання, яке дозволить меншу кількість разів ризикувати, залишаючи велосипед без нагляду.

Відповідь: так.

36. Мандрівник повинен перейти пустелю. Його шлях — 80 км. За один день він проходить 20 км і може нести запас їжі та води на 3 дні. Тому він повинен робити проміжні станції і створювати на них запаси їжі та води. За яку найменшу кількість днів він зможе подолати свій шлях?

Відповідь: За 6 днів.

37. Михайлик і Віталій їхали вниз ескалатором. Посередині ескалатора хуліган Михайлик зірвав з Віталія шапку і кинув на протилежний ескалатор. Потерпілий Віталій побіг назад угору ескалатором, щоб потім спуститися вниз і повернути шапку. Хитрий Михайлик побіг ескалатором униз, щоб потім піднятися вгору і встигнути швидше, ніж Віталій. Хто встигне раніше, якщо швидкості хлопців відносно ескалатору постійні і не залежать від напрямку руху?

Відповідь: Два ескалатори, що рухаються у протилежні боки, утворюють рухоме кільце, на якому можна кататися, як на каруселі. Відносно цього кільця шапка нерухома. Станемо біля неї і спостерігатимемо за бігом хлопців. Ми побачимо, що хлопці одночасно побіжать до нас із діаметрально протилежних точок кільця з рівними швидкостями, але кожний зі свого боку. Тепер очевидно, що хлопці добіжать до шапки одночасно. У цьому доведенні суттєвим є те, що швидкість хлопців більша від швидкості ескалатора, бо інакше Віталій ніколи не підніметься ескалатором, який рухається вниз.

38. Батько та син пливуть на човні проти течії. У якийсь момент син скинув у річку батькового капелюха. Тільки за 15 хвилин батько помітив відсутність

капелюха, розвернув човен, і вони попливли за течією з тією ж власною швидкістю. За скільки хвилин вони наздоженуть капелюх?

Відповідь: За 15 хвилин.

39. Два пішоходи вийшли одночасно на світанку, один — з А до В, а другий — із В до А. Кожен ішов із постійною швидкістю. Вони зустрілися опівдні і, не зупиняючись, прийшли: перший у В — о четвертій вечора, а другий в А — о дев'ятій вечора. О котрій годині був світанок?

Відповідь: О 6 год. ранку.

2. ОСНОВНІ ТИПИ ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. ПОДІЛЬНІСТЬ ЧИСЕЛ

З усіх дій арифметики найпримхливіша — це дія ділення. Вона має особливі властивості, можна сказати, особливу „вдачу”. Візьмемо хоча б оперування з нулем. Для всіх інших арифметичних дій нуль — рівноправне число. Його можна і додавати, і віднімати; він може бути множником у дії множення, але дільником ніколи. Поділити на нуль взагалі не можна жодне число, жодний алгебраїчний вираз. Це — важлива особливість ділення, і коли до неї поставитись неухважно, то не обійтись без несподіванок; можна, наприклад, „довести” будь-яке явно фальшиве твердження — „парадокс”.

„Вдача” ділення проявляється не тільки щодо нуля. Математична теорія приділяє багато уваги властивостям цілих чисел і законам, які керують діями над ними. Так ось, якщо обмежитись множиною самих тільки цілих (додатних і від'ємних) чисел, то знов-таки „капризує” лише одна дія — ділення. Її, як ви знаєте, не завжди можна виконати в області цілих чисел. Прийнято вважати, що ціле число a ділиться на ціле число b , якщо серед цілих чисел знайдеться таке число c , добуток якого на b дає точно число a , а коли такого числа немає, то a не ділиться на b .

Усі ці особливості ділення і сприяли виникненню таких понять, як прості числа, найбільший спільний дільник (НСД), найменше спільне кратне (НСК), ознаки подільності чисел, а поступовий розвиток теорії подільності чисел привів

до глибокого розширення всієї теорії чисел.

Робота над задачами цього розділу у деякій мірі збільшить запас уявлень про подільність чисел, а, можливо, й спонукатиме до систематичного вивчення всієї теорії чисел.

Один з найважливіших способів розв'язування задач полягає в тому, що розв'язування даної задачі зводять до розв'язування іншої, простішої задачі.

Нехай треба встановити, чи ділиться якесь многоцифрове число на друге дане число. Щоб відповісти на це запитання, в ряді випадків зовсім не треба вдаватись до безпосереднього ділення даного числа. Розв'язування поставленої задачі дуже часто можна звести до з'ясування подільності деякого іншого, не многоцифрового числа, складеного за тим чи іншим правилом з цифр даного числа. Так і виникають ознаки подільності чисел.

ОЗНАКА ПОДІЛЬНОСТІ НА 11

Якщо сума цифр даного числа через одну дорівнює сумі решти цифр через одну або різниця цих сум ділиться на 11, то й дане число ділиться на 11.

А коли зазначені суми цифр через одну не дорівнюють одна одній і їх різниця не ділиться на 11, то й дане число не ділиться на 11.

Приклад. Чи ділиться 3 528 041 на 11 ?

Застосуємо ознаку: $3 + 2 + 0 + 1 = 6$, $5 + 8 + 4 = 17$, $17 - 6 = 11$.

$17 - 6 = 11$, ділиться на 11. На підставі ознаки можна твердо сказати: число 3 528 041 обов'язково повинно ділитись на 11. Виконавши ділення безпосередньо, переконаєтесь у тому, що ознака працює.

ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ НА 8 І 4

Якщо число, утворене останніми трьома цифрами даного числа, ділиться на 8, то й все дане число ділиться на 8. Отже, питання зводиться до подільності на 8 деякого трицифрового числа.

Але при цьому нічого не сказано, як в свою чергу швидко дізнатись про подільність цього трицифрового числа на 8. Адже не завжди зразу видно, чи ділиться дане трицифрове число на 8, і доводиться перевіряти це безпосереднім діленням.

Ознака подільності на 4 простіша. Тут треба, щоб ділилось на 4 число, яке складається тільки з двох останніх цифр випробовуваного числа.

Природно виникає запитання: чи не можна спростити і ознаку подільності на 8? Можна, якщо доповнити її спеціальною ознакою подільності трицифрового числа на 8.

На 8 ділиться кожне трицифрове число, в якого двоцифрове число, утворене цифрами сотень і десятків, додане до половини числа одиниць, ділиться на 4.

Приклад. Дано число 592. Щоб розв'язати питання про подільність його на 8, відокремлюємо одиниці і половину їх числа додаємо до числа, утвореного цифрами десятків і сотень. Дістаємо $59 + 1 = 60$. Число 60 ділиться на 4. отже, число 592 ділиться на 8.

Зауваження 1. Зрозуміло, що число, яке закінчується непарною цифрою, не може ділитись на 8.

Зауваження 2. У величезній більшості випадків сума двоцифрового числа, зазначеного в ознаці, і половини одиниць даного числа буде також двоцифровим числом.

Сума буде трицифровою тільки для чисел у межах від 984 до 998, але навіть і в цих випадках вона не перевищуватиме числа 103 ($99 + 4 = 103$).

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ НА 7

Чомусь числу 7 в народі приділяється особлива увага, і воно ввійшло у його пісні і прислів'я:

Сім раз примір, один раз відріж.

Сім погод на дворі: сіє, віє, мутить, крутить, рве, зверху лє, знизу мете.

Краще сім раз горіти, аніж один раз вдовіти!

У семи няньок дитина без носа.

У кого дочок сім — то й щастя всім, а у мене одна — то й щастя нема.

Число 7 багате де тільки на прислів'я, а й на різні ознаки подільності. Є кілька індивідуальних ознак подільності на 7. Пропонуємо дві до розгляду.

ПЕРША ОЗНАКА ПОДІЛЬНОСТІ НА 7

Помножте першу зліва цифру випробовуваного числа на 3 і додайте наступну цифру; результат помножте на 3 і додайте наступну цифру і т. д. до останньої цифри. Для спрощення після кожної дії дозволяється від результату віднімати 7 або число, кратне 7.

Якщо остаточний результат ділиться чи не ділиться на 7, то и дане ділиться чи не ділиться на 7.

Приклад. Визначимо подільність числа 48 916 на 7. Помножимо першу зліва цифру на 3: $4 \cdot 3 = 12$. Для дальших розрахунків число 12 можна замінити числом 5, яке дістаємо, зменшивши 12 на 7. Заміняючи число a числом b , яке відрізняється від a на 7 або на число, кратне 7, ставитимемо між ними значок \equiv . Тоді першу дію можна записати так: $4 \cdot 3 = 12 \equiv 5$. Потім додаємо до 5 другу цифру 8 і знову робимо відповідну заміну: $5 + 8 = 13 \equiv 6$. Далі:

$$6 \cdot 3 = 18 \equiv 4, \quad 4 + 9 = 13 \equiv 6, \quad 6 \cdot 3 = 18 \equiv 4,$$

$$4 + 1 = 5, \quad 5 \cdot 3 = 15 \equiv 1, \quad 1 + 6 = 7.$$

Остаточний результат 7. Отже, число 48 916 ділиться на 7.

ДРУГА ОЗНАКА ПОДІЛЬНОСТІ НА 7

Подільність на 7 за цією ознакою визначають так само, як за попередньою, з тією лише відмінністю, що множення треба починати не з крайньої лівої цифри даного числа, а з крайньої правої і помножати не на 3, а на 5.

Приклад. Чи ділиться на 7 число 37 184?

$4 \cdot 5 = 20 \equiv 6$, $6 + 8 = 14 \equiv 0$, $0 \cdot 5 = 0$, $0 + 1 = 1$; $1 \cdot 5 = 5$; додавання цифри 7 можна пропустити;

$5 \cdot 5 = 25 \equiv 4$, $4 + 3 = 7 \equiv 0$. Число 37 184 ділиться на 7.

КУРЙОЗ ПОДІЛЬНОСТІ

На закінчення розглянемо 4 цікавих десятицифрових числа:

2438 195 760 4 753 869 120 785 942 160 4 876 391 520

У кожному з них є всі цифри від 0 до 9, але кожна цифра тільки по одному разу і кожне з цих чисел ділиться на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 і 18.

Розглянемо такі задачі.

1. Число на гробниці

В одній з єгипетських пірамід вчені знайшли на кам'яній плиті гробниці вигравіроване ієрогліфами число 2520. Важко точно сказати, за що випала така честь цьому числу. Можливо, за те, що воно без остачі ділиться на всі без винятку цілі числа від 1 до 10.

Справді, немає числа, меншого від 2520, яке б мало таку властивість. Неважко переконатись у тому, що це число є найменшим спільним кратним цілих чисел першого десятка.

2. Подарунки до Нового року

Готуючи подарунки дітям до Нового року, швидко розклали по пакетах цукерки і печиво. Але коли почали розкладати мандарини, то натрапили на таке утруднення: спочатку хотіли розкласти всі мандарини по 10 штук у пакет,— не вийшло: на один з пакетів лишилось 9 мандаринів; коли поклали по 9 мандаринів, лишилося 8 мандаринів на один з пакетів; спробували розкласти по 8 мандаринів, лишилось 7; почали розкладати по 7, лишилось 6; поклали по 6, лишилось 5.

— Що за дивина! Невже так буде і далі? Взяли папір, олівець і почали обчислювати. І що б видумали: ділимо число мандаринів на 5, лишається 4; ділимо на 4, лишається 3; ділимо на 3, лишається 2; ділимо на 2, лишається 1. Ось яке дивне число мандаринів ми мали. А скільки ж все-таки?

3. Чи може бути таке число?

Чи може бути таке число, яке при діленні на 3 дає в остачі 1, при діленні на 4 дає в остачі 2, при діленні на 5 дає в остачі 3 і при діленні на 6 дає в остачі 4?

4. Кошик яєць (із старовинного французького задачника)

Жінка несла на базар кошик яєць. Перехожий ненароком штовхнув жінку, кошик упав, яйця побились. Винуватець нещастя, щоб відшкодувати збитки, запитав:

— Скільки всього було яєць в кошику?

—Точно не пам'ятаю,— відповіла жінка,— але знаю, що коли я виймала з кошика по 2, по 3, по 4, по 5 або по 6 яєць, у кошику лишалось одне яйце, а коли я виймала по 7, кошик був порожній.

Скільки яєць було у кошику?

5. Трицифрове число

Якщо від задуманого мною трицифрового числа відняти 7, то воно поділиться на 7, якщо відняти від нього 8, то воно поділиться на 8, а якщо відняти від нього 9, то воно поділиться на 9. Яке число я задумав?

6. Чотири теплоходи

У порту пришвартувалось 4 теплоходи. Опівдні 2 січня 1953 року вони одночасно залишили порт. Відомо, що перший теплохід повертається до цього порту через кожні 4 тижні, другий — через кожні 8 тижнів, третій — через 12 тижнів, а четвертий — через 16 тижнів.

Коли вперше теплоходи знов зустрінуться в цьому порту ?

7. Помилка касира

Звертаючись до касира магазину, покупець сказав:

— Візьміть, будь ласка, з мене за 2 пачки солі по 90 коп., за 2 куски мила по 2 грн. 70 коп., за 3 пачки цукру і за 6 коробочок сірників, але вартості пачки цукру і сірників я не пам'ятаю.

Касир видав покупцеві чек на 29 грн. 17 коп. Подивившись на чек, покупець повернув його касирові і сказав:

— Підраховуючи загальну суму, ви, безперечно, помилились.

Касир перевірів і погодився. Довелось вибачитись і видати покупцеві другий чек. Як покупець знайшов помилку?

Відповідь: сума цифр $2 + 9 + 1 + 7 = 19$ не ділиться на 3.

ВІДПОВІДІ:

2. 2519

3. 58

4. 721

5. 504

6. 48 тижнів

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

ЗАДАЧІ

1. Усі цілі числа, починаючи з 1, виписані підряд. Яка цифра стоїть на 1975-му місці?

Розв'язання. Одноцифрові числа займають 9 місць, 90 двоцифрових чисел – 180 місць. Залишається $1975 - 189 = 1786$ місць. 1785 місць займуть 595 трицифрових чисел, останнім з яких буде число 694. Отже, на 1975-му місці стоятиме цифра 6.

2. Знайти найменше трицифрове число, кратне 3, одна з цифр якого 8.

Відповідь. Шукане число 108.

3. Дано п'ятицифрове число 25 762. Яку цифру і на якому місці слід записати, щоб дістати число, яке ділиться на 36?

Розв'язання. Число ділиться на 36 тоді, коли воно ділиться на 4 і 9. Шукане шестицифрове число поділиться на 4, якщо друга від кінця цифра в нього буде непарною або остання цифра кратна 4. Щоб це число поділилось на 9, слід дописати цифру 5. Її можна дописати лише на місце десятків. Отже, шукане число 257 652.

4. Усі цілі числа від 1 до 100 написані підряд. Викреслити з утвореного числа 100 цифр так, щоб утворене число було найбільшим.

Розв'язання. Треба, щоб в результаті викреслювання спереду залишилось якомога більше дев'яток. Перша цифра 9 буде після викреслювання 8 цифр, 4 інші дев'ятки дістанемо, викресливши $19 \cdot 4 = 76$ цифр. З 16 цифр, які ще можна викреслити, 15 витратимо на викреслювання цифр 505152535455565, щоб залишити найбільшу можливу цифру 7. Після цього викреслимо ще одну цифру 5 і дістанемо число 9999978596061...99100.

5. Знайти найменше п'ятицифрове число, кратне 360, всі цифри якого різні.

Розв'язання. Остання цифра шуканого числа 0. Потрібно підібрати такі чотири різні цифри, сума яких дорівнює 18, щоб скласти з них мінімальне число, кратне 36. Шукане число 12 960.

2.3. ЗАДАЧІ НА ПЕРЕЛИВАННЯ ТА ЗВАЖУВАННЯ

Навряд чи комусь доведеться шукати серед однакових монет фальшиву за допомогою зважувань на талькових терезах без гир, але для тренування своєї думки візьмемо ці умови як вихідні для розв'язування таких задач «на міркування».

1. У мішку 24 кг цвяхів. Як за допомогою талькових ваг без гир відміряти 9 кг цвяхів?
2. Із трьох монет одна фальшива. Як знайти її одним зважуванням на талькових вагах без гир, якщо відомо, що фальшива монета легша від справжньої?

Розв'язування. Покладемо на шальки ваг по одній монеті. Якщо ваги перебувають у рівновазі, то фальшива монета та, яку не зважували. Якщо ж ваги не перебувають у рівновазі, то легша монета фальшива.

3. Із дев'яти монет одна фальшива. Як знайти її двома зважуваннями на талькових вагах без гир, якщо відомо, що фальшива монета легша від справжньої?
4. Із двадцяти семи монет одна фальшива. Як знайти її трьома зважуваннями на шалькових вагах без гир, якщо відомо, що фальшива монета легша від справжньої?
5. Із 80 монет одна фальшива. Як знайти її чотирма зважуваннями на шалькових вагах без гир, якщо відомо, що фальшива монета легша від справжньої?
6. Із 61 монети одна фальшива. Як знайти її чотирма зважуваннями на шалькових вагах без гир, якщо відомо, що фальшива монета важча від справжньої?
7. Із чотирьох монет одна фальшива. Як знайти її двома зважуваннями на шалькових вагах без гир, якщо невідомо, легша чи важча фальшива монета від справжньої?

Розв'язання. Позначимо монети літерами А, В, С і Д. Спочатку зважуємо монети А і В, а потім — В і С. Якщо $A = B$ і $B = C$, то фальшива монета —

Д, якщо $A = B$ і $B \neq C$, то фальшива монета — C . Якщо $A \neq B$ і $B = C$, то фальшива монета A ; якщо $A \neq B$ і $B \neq C$, то фальшива монета — B .

8. Із 12 монет одна фальшива. Як знайти її чотирма зважуваннями на шалькових вагах без гир, якщо невідомо, легша чи важча фальшива монета від справжньої?
9. Із 16 монет одна фальшива. Як знайти її чотирма зважуваннями на шалькових вагах без гир, якщо невідомо, легша чи важча фальшива монета від справжньої?
10. Як, маючи дві посудини місткістю 7 л і 5 л, налити з водопровідного крану 6 л води?

Розв'язання. Використаємо таблицю:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5 л	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5
7 л	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6

11. Є дві посудини місткістю 3 і 5 л. Як за допомогою цих посудин налити з водопровідного крану 4 л води?

Розв'язання. Використаємо таблицю:

	1	2	3	4	5	6
3 л	0	3	0	2	2	3
5 л	5	2	2	0	5	4

12. У бочці міститься не менше 13 відер бензину. Як відлити з неї 8 відер за допомогою 2 бочок, місткістю 9 і 5 відер?

Розв'язання. Використаємо таблицю:

	1	2	3	4	5	6
5 відер	0	5	0	4	4	5
9 відер	9	4	4	0	9	8

ВКАЗІВКИ:

3. *Вказівка:* розділіть монети на три рівні купки.
4. *Вказівка:* розділіть монети на три рівні купки.

5. *Вказівка:* розділіть монети на дві купки по 27 монет і одну — з 26 монет. Зауважте, що коли перші дві купки важать однаково, то в них усі монети справжні і будь-яку з цих монет можна додати до купки з 26 монет. Тепер задача зводиться до попередньої.
6. *Вказівка:* розділіть монети на дві купки по 27 монет і одну — з 7 монет.
8. *Вказівка:* розділіть монети на три рівні купки.
9. *Вказівка:* розділіть монети на чотири рівні купки.

2.4. МЕТОД ТАБЛИЦЬ І ГРАФІВ

При розв’язуванні логічних задачах для систематизації даних дуже часто використовуються таблиці та графи. Графи – це рисунки, за допомогою яких показується залежність між деякими об’єктами логічної задачі.

Приклад 1. Три подружки Таня, Оля і Катя прийшли на свято в сукнях різного кольору: одна – в білому, друга – в червоному, третя – в зеленому. Таня – не в червоному, Оля – не в червоному і не в зеленому. Скажіть в якій сукні кожна з дівчаток?

Для **розв’язання** задачі складемо і заповнимо таблицю:

	Таня	Оля	Катя
Біла сукня	–	+	–
Червона сукня	–	–	+
Зелена сукня	+	–	–

Таким чином, Таня була в зеленій сукні, Оля – в білій, Катя – в червоній.

Завдання. Зобразити розв’язання задачі у вигляді графів.

Приклад 2. В понеділок, вівторок, середу повинні чергувати в класі Ваня, Олег і Саша. Але хлопці сказали свої бажання:

- Мене не призначайте на середу, бо я в цей день займають в музичній школі, - сказав Ваня.
- У вівторок я іду на тренування в спортивну школу, - повідомив Олег.
- А мене призначте на вівторок, - попросив Саша.

Всі побажання друзів були виконані. Як чергували хлопці?

Розв'язання.

	понеділок	вівторок	середа
Ваня	+	–	–
Олег	–	–	+
Саша	–	+	–

Отже, Ваня чергував у понеділок, Олег – в середу, а у вівторок чергував Саша.

Завдання. Зобразити розв'язання задачі у вигляді графів.

Приклад 3. В одній сім'ї багато дітей. Семеро з них люблять капусту, шестеро – моркву, п'ятеро – огірки, четверо – капусту і моркву, троє – капусту і огірки, двоє – моркву і огірки, а один любить і капусту, і моркву, і огірки. Скільки дітей в сім'ї?

Розв'язання. Зручно розв'язувати задачу з кінця за допомогою таблиці:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Люблять капусту	+	+	+	+	+	+	+			
Люблять моркву	+			+	+	+		+	+	
Люблять огірки	+	+	+					+		+

Отже, в сім'ї повинно бути 10 дітей.

Завдання. Зобразити розв'язання задачі у вигляді графів.

ЗАДАЧІ

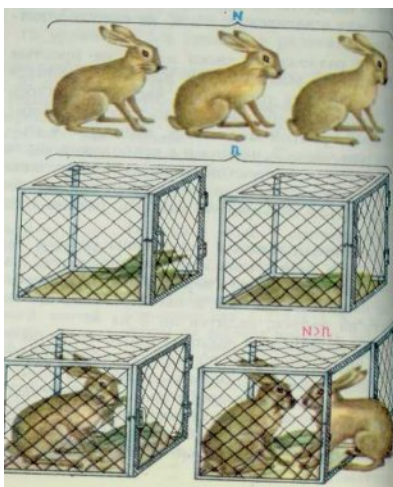
- Три однокласниці Соня, Таня, Женя займаються в спортивних секціях: одна – в гімнастичній, друга – в лижній, третя – по плаванню. Яким видом спорту займається кожна з них, якщо відомо, що Соня не вміє плавати, Таня в лижну секцію ніколи не ходила, а Женя – призер в змаганнях по лижам?
- Володимир, Ігор та Сергій викладають математику, фізику і літературу. Живуть вони в Києві, Львові та Одесі. Відомо також, що Володимир живе не у Львові, Ігор живе не в Одесі, одесит – не фізик, Ігор – не математик, львів'янин викладає літературу. Хто де живе та що викладає.

3. Іваненко, Петренко, Леоненко і Симоненко – 4 талановитих молодих чоловіка. Один з них танцюрист, другий – художник, третій – співак, четвертий – письменник. Про них відомо, що:

- 1) Іваненко і Леоненко сиділи в залі консерваторії тоді, коли співак виступав на сцені.
 - 2) Художник малював портрети Петренка і письменника.
 - 3) Письменник написав біографічне оповідання про Симоненка і збирається написати про Іваненка.
 - 4) Іваненко ніколи не чув про Леоненка.
- Хто чим займається?

2.5. ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

У своїй доповіді «Про професію математика» академік А. М. Колмогоров підкреслив, що навіть довести, що у хвойному лісі з восьмисот тисяч ялинок, на кожній з яких не більше 500 000 глиць, принаймні на двох ялинках число хвоїнок однакове, викликає труднощі у багатьох учнів. У олімпіадних задачах, які пропонувались за останні роки, логічний наголос ставився саме на таких запитаннях. Подібні задачі можна умовно назвати задачами на принцип Діріхле. Під цим принципом розуміють таке твердження: «Якщо $n + 1$ об'єктів розміщати на n місцях, то знайдеться принаймні два об'єкти, які розмістяться на одному і



тому самому місці». Цей принцип допоміг німецькому математикові П.Діріхле (1805—1859) досягти значних успіхів у своїх дослідженнях з теорії чисел. У жартівливій формі принцип Діріхле часто формулюють так: «П'ять кроликів не можна посадити у чотири клітки так, щоб кожний з них сидів в окремій клітці».

Розглянемо деякі задачі, які розв'язуються за допомогою принципу Діріхле.

1. У школі 740 учнів. Довести, що принаймні троє з них в один і той самий день святкують свій день народження.

Доведення. Якби щодня двоє учнів святкували свій день народження, то в школі було б 732 учні.

2. Довести, що серед 101 цілого числа можна вибрати два, різниця яких ділиться на сто.

Доведення. Нагадаємо, що при діленні числа на 100 може бути 100 остач: 0, 1, 2, ..., 99. Серед 101 остачі, які ми дістаємо від ділення даних в умові 101 числа на 100, принаймні дві однакові. Різниця цих двох чисел і ділиться на 100.

3. П'ять школярів з'їли шість цукерок. Чи правильно, що хоча б один з'їв не менше двох цукерок? Чи правильно, що один з'їв дві цукерки?

4. На складі є 28 пар взуття трьох розмірів. Доведіть, що серед них можна вибрати не менше 10 пар однакового розміру.

5. У класі 15 учнів. Чи знайдеться місяць, у якому святкують свій день народження не менше ніж два учні цього класу?

6. У школі 30 класів і 1000 учнів. Доведіть, що у школі є клас, в якому не менше 34 учнів.

Доведення. Якби такого класу не було, то в школі було б не більше ніж $30 \cdot 33 = 990$ учнів.

7. У школі навчається 677 учнів. Доведіть, що принаймні у двох із них збігаються перші літери імені та прізвища.

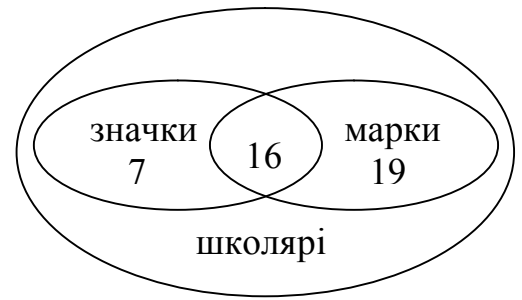
8. У класі навчається 41 учень. Під час диктанту учень Помилкин зробив 13 помилок, а всі інші – менше. Доведіть, що є принаймні 4 учні, які зробили однакову кількість помилок.

2.6. КОЛА ЕЙЛЕРА

Розглянемо таку задачу. Із 52 школярів 23 збирають значки, 35 — марки, а 16 — і значки, і марки. Інші не займаються колекціонуванням. Скільки школярів не колекціонують нічого?

В умові цієї задачі не так просто розібратися. Щоб легко розв'язати цю задачу, зобразимо її дані так, як показано на рисунку. Велике коло — всі школярі, про яких ідеться. Два менших кола — це значки, тобто школярі, які

колекціонують значки (усього їх 23), та марки, тобто школярі, що колекціонують марки (усього їх 35).



Ці кола перетинаються, бо сказано, що 16 школярів колекціонують значки і марки. Тому тільки значки збирають $23 - 16 = 7$ школярів, тільки марки збирають $35 - 16 = 19$ школярів.

Усього марки і значки збирають $19 + 7 + 16 = 42$ школярів.

Залишається $52 - 42 = 10$ школярів, що не займається колекціонуванням. Це число можна вписати у вільне поле великого круга.

Такі схеми називаються **колами (або діаграмами) Ейлера**.

ЗАДАЧІ

- 35 учнів класу 12 брали участь у конкурсі декламаторів віршів, 10 — у конкурсі на найкращий малюнок, 4 брали участь в обох конкурсах. Скільки учнів не брали участі в конкурсах взагалі?
- У групі з 80 туристів, що приїхали на екскурсію в Москву, 52 хочуть піти у театр, 30 — до музею, 12 хочуть піти у театр та у музей, інші в театр та музей йти не хочуть. Скільки туристів не збираються до театру та музею?
- Підприємство купило комп'ютер, факс, сейф і телефон за 42 700 грн. Факс, сейф і телефон разом коштують 19 700 грн, комп'ютер, сейф і телефон — 40 700 грн, факс і сейф разом коштують 17 200 грн. Скільки коштують окремо комп'ютер, факс, сейф і телефон?
- Школа дала звіт: усього в школі 60 шестикласників, з них 37 відмінників з математики, 33 — з української мови і 42 — з фізкультури. При цьому в 21 особи «дванадцять» з математики та української мови, а у 23 — з математики і фізкультури, у 22 — з української мови і фізкультури. При цьому 20 осіб вчаться на «відмінно» з усіх трьох предметів. Чи правильний звіт школи?
- Олексій та Борис разом важать 82 кг, Олексій та Володя 83 кг, Борис та Володя 85 кг. Скільки разом важать Олексій, Борис та Володя?
- Три качечки та чотири гусеняти разом важать 2 кг 500 г, а чотири качечки і

три гусеняти 2 кг 400 г. Скільки важить одне гусенятко? Скільки важить одна качечка?

7. На склад доставили вантаж. На I і II склади доставлено 400 т, на II і III — 300 т, а на I і III — 440 т. Скільки тонн вантажу доставлено на кожний склад?

8. Серед студентів, присутніх у кімнаті, 6 знають англійську мову, стільки ж — німецьку і 7 студентів — французьку. Один студент знає всі ці три мови, чотири студенти знають німецьку й англійську, два — французьку і англійську і 3 студенти знають німецьку і французьку мови. Скільки присутніх у цій кімнаті, якщо кожний з них знає хоча б одну мову?

2.7. КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ

Під час математичних змагань часто пропонуються різноманітні задачі, які вимагають уміння підраховувати кількість елементів заданої сукупності. Наводимо окремі задачі цього типу.

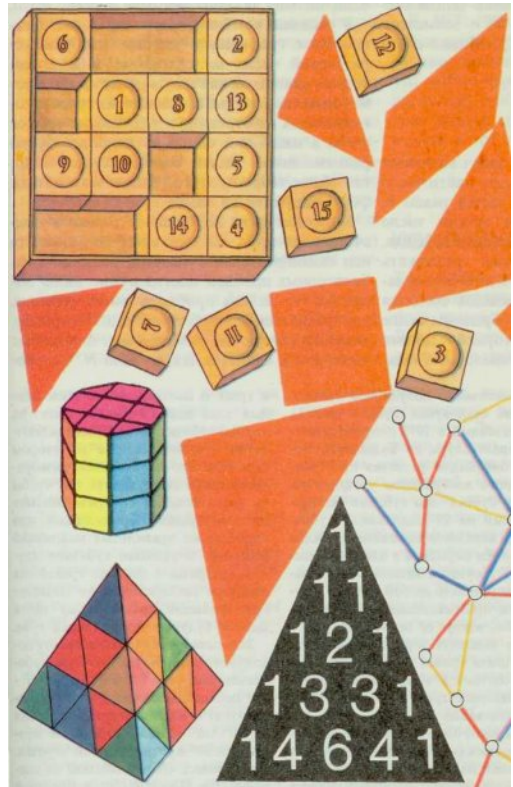
1. Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 100, які:

- діляться на 2 і 3;
- діляться на 2, але не діляться на 3;
- діляться на 3, але не діляться на 2;
- діляться на 3 або на 2;
- не діляться ні на 2, ні на 3?

Розв'язання. Числа, які одночасно діляться на 2

і на 3, діляться на 6. Серед перших 99 додатних чисел є лише 16, кратних 6, або $6 \cdot 16 + 3 = 99$. Отже, чисел, які одночасно діляться на 2 і на 3, буде 16.

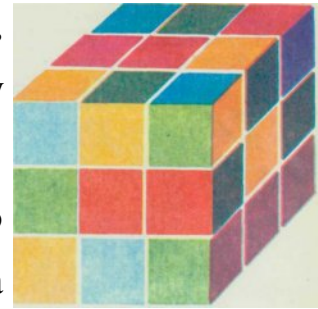
Щоб знайти числа, які діляться на 2, визначимо кількість парних чисел, більших від 1 і менших від 99. Таких чисел буде 49, бо $49 \cdot 2 + 1 = 99$. Але серед цих парних чисел є і такі, які діляться на 3. Вище ми підраховували, що їх 16. Тому чисел, які діляться на 2, але не діляться на 3, буде $49 - 16 = 33$.



Чисел, які діляться на 3, буде 33. Оскільки $33 - 16 = 17$, то цілих додатних чисел, менших від 100, які діляться на 3, але не діляться на 2, буде 17.

Чисел, що діляться на 3 або на 2, буде $49 + 33 - 16 = 66$. Якщо від 99 відняти попередній результат: $99 - 66 = 33$, то дістанемо ті числа першої сотні, які не діляться ні на 2, ні на 3.

2. Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 100, цифри яких ідуть: а) у зростаючому порядку; б) у спадному порядку; в) у не зростаючому порядку?



Розв'язання. 1-й спосіб. Цифри додатного двоцифрового числа ідуть у зростаючому порядку тоді, коли перша цифра менша за другу. Однак незрозуміло, як бути з числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Перетворимо ці числа в двоцифрові, ставлячи перед кожним з них нуль: $1 = 01$; $2 = 02$; ..., $9 = 09$.

Випишемо підряд усі такі числа: 01, 02, 03, ..., 09, 12, 13, ..., 19, 23, ..., 29, 34, ..., 89 і перелічимо їх. Помічаємо, що в першому десятку їх 9, у другому — 8, у третьому — 7 і т. д. У дев'ятому десятку — 1, а в десятому їх взагалі не буде. Тому треба додати числа $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.

У випадку б) можна зробити такий самий підрахунок, як і у випадку а). Тоді відразу стане відомо, що відповідь така сама, як і у випадку а), бо якщо в кожному числі, цифри якого ідуть у зростаючому порядку, поміняти ці цифри місцями, дістанемо число, цифри якого йдуть у спадному порядку.

До таких чисел, цифри яких ідуть у незростаючому порядку, відносяться числа, цифри яких ідуть у спадному порядку, і числа, обидві цифри яких однакові. Кількість чисел із зростаючим порядком цифр ми вже знаємо. Чисел з однаковими цифрами — 9: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

(Відповідь: 54 числа.)

2-й спосіб. Двоцифрових чисел, обидві цифри яких різні, 90, а чисел, менших від 100, цифри яких однакові — 9. Двоцифрові числа з двома різними цифрами діляться на два класи, що складаються з чисел із зростаючим порядком і

чисел із спадним порядком цифр, причому кількість перших і других однакова. Отже, чисел із зростаючим порядком цифр буде $90/2 = 45$.

3. Скільки існує натуральних трицифрових чисел, цифри яких записані в зростаючому порядку?

Розв'язання. З трьох різних цифр можна утворити шість різних трицифрових чисел, серед яких лише в одному цифри йтимуть у зростаючому порядку. Тому шукані числа становитимуть шосту частину всіх трицифрових чисел з різними цифрами, тобто 120.

4. Скільки існує трицифрових чисел, перша цифра яких більша від двох інших, а друга — менша від третьої?

Розв'язання. Таке число дістаємо з кожного трицифрового числа, цифри якого йдуть у спадному порядку, якщо в ньому переставити місцями другу і третю цифри. Таких чисел буде 120.

5. Чи існує дев'ятицифрове число, записане цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, з якого не можна викреслити жодних п'яти цифр так, щоб чотири цифри, які залишаться, були записані у зростаючому чи в спадному порядку?

Розв'язання. Існують такі числа. Одним з них буде число 321 654 987. Якщо будь-які з цифр записані в спадному порядку, то вони обов'язково містяться в першій, або в другій, або в третій трійці. Тому в цьому числі неможливо вибрати більш як три цифри, записані у спадному порядку. Аналогічно доводиться, що неможливо вибрати більш як три цифри, записані у зростаючому порядку.

6. Скільки різних добутоків, кратних 10, можна утворити з чисел 2, 3, 5, 7, 9?

Розв'язання. Щоб добуток вибраних чисел ділився на 10, серед співмножників мають бути числа 2 і 5. З трьох чисел, що лишились, можна скласти 8 груп. Одна з них містить три числа, три містять по два числа і три — по одному числу. Восьма група не містить жодного з цих чисел. Отже, з цих п'яти чисел можна скласти 8 шуканих добутоків.

7. Знайти суму цифр усіх шестицифрових чисел, які можна утворити за допомогою цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 (цифри в числах не повторюються).

Розв'язання. Знайдемо всі шестицифрові числа, які можна записати за допомогою зазначених цифр. На перше місце можна поставити будь-яку з шести цифр, на друге — будь-яку з п'яти, що залишились після того, як вибрали першу цифру. Міркуючи так, визначимо, що всіх чисел буде 720. Сума цифр кожного з них одна і та сама — 27. Отже, сума цифр усіх чисел буде 19 440.

8. На площині 10 точок. Скільки існує відрізків, що сполучають ці точки?

Розв'язання. Відповідь у цій задачі така сама, як і в задачі 4.3, тобто 45 відрізків. Щоб переконатись в цьому, позначимо 10 ; точок цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Розглянемо тепер будь-який відрізок, що сполучає ці точки. На кінцях відрізка стоять дві різні цифри. Поставивши їх у порядку зростання, дістанемо двоцифрове число із зростаючим порядком цифр.

Отже, двом різним відрізкам відповідають два: різних: числа і двом різним числам – два різних відрізки.

9. Чи можна організувати такий турнір, щоб у ньому брало участь 40 команд і кожна команда зіграла рівно 3 матчі?

Розв'язання. Позначимо кожную команду точкою, а кожний матч, зіграний двома командами, - дугою, яка сполучає пі точки. Тоді з кожної точки має виходити три дуги. Всіх матчів буде $(40 \cdot 3) / 2 = 60$.

10. Чи можна організувати такий турнір, щоб у ньому брали участь 13 команд, і кожна команда зіграла рівно 5 матчів?

Розв'язання. Як і в попередній задачі, підрахуємо кількість дуг, які відповідають зіграним матчам: $(13 \cdot 5) / 2 = 32,5$. Кількість дуг не виражається цілим числом, тому такий турнір не можна провести.

3. МАТЕМАТИЧНА МОЗАЇКА

3.1. МАТЕМАТИЧНІ ІГРИ

Є ігри, успішне проведення яких залежить не від випадкового збігу сприятливих обставин, а від власної кмітливості і попереднього розрахунку. Той, хто вміє зробити розрахунок, що лежить в основі гри, стає володарем „секрету” гри, що забезпечує йому перемогу над партнерами, які ще не опанували її математичної основи. Такі ігри мають властивості задач. З другого боку, елементи гри властиві майже кожній задачі типу „математичних розваг”.

Одинадцять предметів

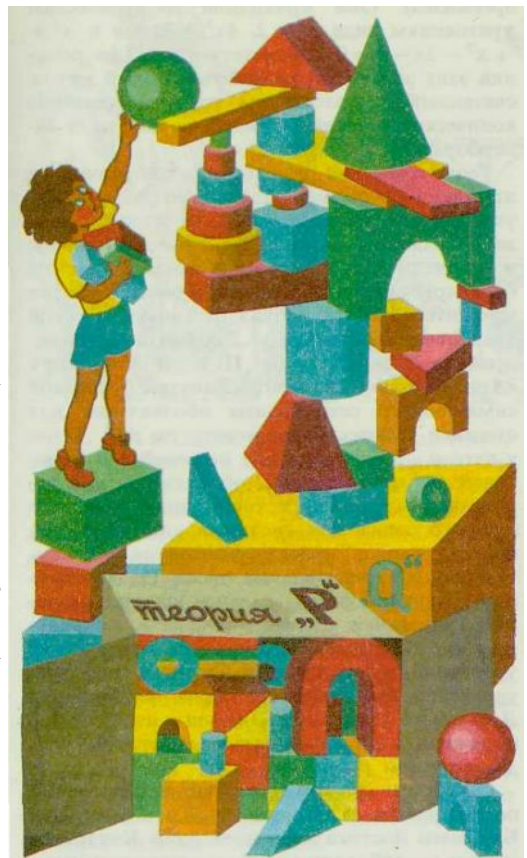
На столі — одинадцять однакових предметів, наприклад сірників. Перший учасник гри бере собі з цієї кількості на свій розсуд 1, 2 або 3 предмети, потім другий учасник гри бере собі з числа предметів, які лишилися, також на свій розсуд, 1, 2 або 3 предмети. Потім знов бере перший і т. д. Так по черзі обидва гравці беруть щоразу не більш як по 3 предмети. Програє той, кому доведеться взяти останній предмет. Чи може гравець, який починає гру, поставити свого партнера перед необхідністю взяти останній предмет?

Як треба вести гру, щоб виграти тоді, коли початкове число предметів 30?

Розв’язання. Може. Попередній розрахунок зручніше починати „з кінця”. В останньому турі перший гравець повинен залишити для другого один предмет. Скільки предметів він повинен залишити другому гравцеві в передостанньому турі? Очевидно, 5.

Справді, якщо тепер другий гравець візьме 1, 2 або 3 предмети, то перший гравець може взяти відповідно 3, 2 чи 1 предмет, і в усіх випадках для другого гравця залишається $5 - 4 = 1$ предмет.

Міркуючи аналогічно, знайдемо, що ще



раніше перший гравець повинен залишити другому 9 предметів. Чи візьме тепер другий гравець 1, 2 або 3 предмети, перший гравець може взяти відповідно 3, 2 або 1 предмет і в усіх випадках для другого гравця залишається $9 - 4 = 5$ предметів.

Всього предметів 11. Отже, той, хто починає гру, повинен взяти 2 предмети, щоб залишити другому 9; у другому турі він повинен залишити другому 5 предметів, тоді в третьому турі він зможе залишити своєму партнерові 1 предмет і виграти гру. Кількості предметів, які перший гравець залишає другому (з кінця): 1, 5, 9, утворюють ряд чисел, в якому перше число 1, а кожне наступне більше від попереднього на 4. Продовжуючи цей ряд чисел далі, дістанемо ключ до виграшу гри у випадку 30 предметів: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. Отже, при 30 предметах гравець, що починає гру, повинен взяти 1 предмет, залишивши своєму партнерові 29, і в кожному наступному турі залишати йому відповідно 25, 21, 17, 13, 9, 5, 1 предметів.

Взяти сірники останнім

Змінимо основну умову попередньої гри. Нехай тепер гравець, який взяв сірники останнім, не програє, а виграє гру. Грають двоє і беруть по черзі, кожний на свій розсуд, будь-яку кількість сірників у межах від одного до шести. Як треба вести гру, щоб узяти сірники останнім, якщо спочатку на столі лежало 30 сірників?

Розв'язання. Виграє той, хто на кінець гри залишить своєму партнерові 7 сірників. Справді, всі 7 сірників партнер взяти не може, а скільки б він не взяв у межах від одного до шести сірників, він сірники з стола візьме не останнім. У свою чергу, щоб мати можливість залишити партнерові 7 сірників, треба перед цим залишити йому 14 сірників, а ще раніше 21 і 28.

Той гравець, що починає гру, повинен взяти 2 сірники, і тоді, додержуючи надалі зазначеного правила, він буде переможцем.

Ви берете, наприклад, 2 сірники, а ваш «противник» 4 або 2 (парне число). Залишається $27 - 6 = 21$ сірник або $27 - 4 = 23$ сірники. Згідно з правилом ви берете 2 сірники або 4, щоб залишити «противникові» 19. А коли «противник»

взяв 3 сірники (непарне число), то залишилося $27 - 5 = 22$ сірники. Через те що до 17 сірників довести остачу ви не можете (не можна взяти 5 сірників), то вам треба взяти 4 сірники, щоб остача становила 18. Якщо «противник» взяв один сірник, то й вам треба взяти один сірник, щоб остача становила $27 - 4 = 23$ сірники, і т. д.

Перемагає чіт

З 27 сірників, що лежать на столі, два гравці по черзі беруть не менш як один і не більш як чотири сірники. Виграє той, хто після закінчення гри матиме парне число сірників. Як виграти гру?

Цзяньшицзи

„Цзяньшицзи” — китайська національна гра. Буквальний переклад слова „Цзяньшицзи” — „вибирання камінців”.

Грають двоє. Поклавши на землю дві купки камінців, гравці по черзі беруть камінці з цих купок, додержуючи таких правил:

- а) з однієї купки можна брати будь-яке число камінців (навіть відразу всю купку),
- б) можна брати камінці одночасно з двох купок, але обов'язково по однаковому числу з кожної купки.

Виграє той, хто, додержуючи цих правил, зможе взяти останній камінець.

Зрозуміло, що камінці можна замінити будь-якими іншими предметами. Гра „Цзяньшицзи” є дальшим розвитком і розширенням тільки що описаних ігор з сірниками.

Хто перший скаже „сто”?

Грають двоє. Перший учасник гри називає довільне ціле число, яке не перевищує десяти, тобто він може назвати 10 і будь-яке менше число. Другий гравець додає до цього числа своє ціле число, яке також не перевищує 10, і говорить суму. До цієї суми перший додає ціле число, яке знов-таки не перевищує 10, і говорить нову суму. До нової суми другий додає число, яке не перевищує 10, і т. д. доти, доки остаточною сумою не дорівнюватиме 100.

Перший може назвати, наприклад, 7, другий 12, перший 22 і т. д.

Виграє той, хто перший скаже 100.

Як перемогти?

Знайшовши ключ до перемоги, обдумайте план ведення гри в інших умовах, наприклад, коли найбільша величина доданка дорівнює не 10, а якому-небудь іншому числу, і найбільша сума дорівнює не 100, а іншому наперед заданому числу.

Розв'язання. Якщо ви хочете першим досягти 100, то вам першому треба досягти і 89. Справді, коли названу вами суму відокремлюватиме від 100 число 11, то, яке б число (десять чи менше) не додав ваш партнер, ви відразу знайдете доданок, який доповнює до 100 суму, названу партнером. Але для того щоб першим досягти 89, треба віддалити партнера і від цього числа на 11, тобто зуміти першим сказати 78. Продовжуючи ці міркування, ми дістанемо ряд таких чисел, називаючи які ви прийдете до фінішу першим. Починається цей ряд чисел з одиниці: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Тепер зрозуміло, що коли ви скажете 1, то, хоч би яке число (одинадцять чи менше) сказав ваш партнер, він не перешкодить вам сказати 12, потім 23, 34 і т. д. Запам'ятати цей ряд «ключових» чисел легко: в кожному десятку по одному числу, в якого число одиниць на одиницю більше від числа десятків.

(Якщо партнер не знає «ключа» до гри, то він, звичайно, додаватиме числа, які випадково спали йому на думку, тому ви, повторюючи з ним гру, можете рискнути в межах першої половини сотні «замести сліди», не додержуючи «ключових» чисел).

Гру можна різноманітити, змінивши граничний доданок і граничну суму. Нехай, наприклад, граничний доданок буде, як і раніше, 10, але гранична сума не 100, а 120. Віднімаючи послідовно від 120 по 11, знайдемо такі «ключові» числа: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 109. Обізнаний з цим «секретом» виграє, якщо почне з числа 10.

Нехай тепер граничною сумою буде 100, а граничним доданком буде не 10, а 8. Тоді «ключові» числа знайдемо відніманням по 9 від 100 і від кожної

утвореної різниці: 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. І у даному випадку виграє той, хто починає гру і знає її «секрет».

Але коли взяти як граничний доданок число 9, то числами, які треба мати на увазі, будуть 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10. У цьому випадку бажаючий виграти не повинен починати гру, якщо, звичайно, партнер знає «секрет» перемоги.

3.2. МАТЕМАТИЧНІ ФОКУСИ

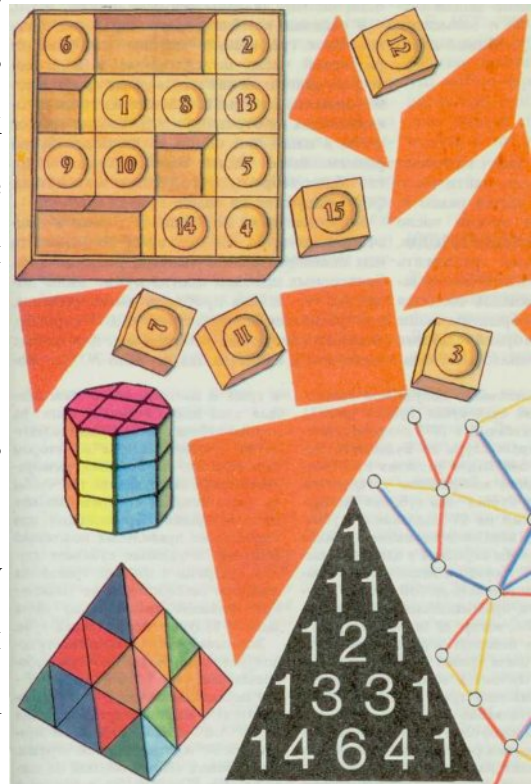
Велике враження на учнів справляє демонстрування того або іншого математичного фокуса. Основною темою арифметичних фокусів є вгадування задуманих чисел або результатів над ними. „Секрет” цих фокусів в тому, що „відгадник” знає й уміє використати особливі властивості чисел, а той, що задумує, цих властивостей не знає.

Математичний інтерес кожного фокуса і полягає у „викритті” його теоретичних основ, які здебільшого бувають дуже прості, але хитро замасковані.

Здійсненність кожного фокуса можна перевірити на будь-якому прикладі, але для обґрунтування більшості арифметичних фокусів найзручніше вдатись до алгебри. На перших порах ви можете проминути „доведення” фокусів, а обмежитись лише засвоєнням їх змісту, щоб показати їх своїм товаришам. Проте й доведення не перевантажать тих, хто любить міркувати й обізнаний з початками алгебри.

Фокус 1. Задумайте число. Відніміть 1. Остачу подвойте і додайте 20 число. Скажіть результат. Я вгадаю задумане число.

Фокус 2. Запропонуйте своєму товаришеві задумати яке-небудь число. Потім нехай він кілька разів по черзі помножить і поділить задумане число на різні, довільно



взяті вами числа. Результату дій нехай він вам не говорить. Після кількох множень і ділень запропонуйте йому поділити знайдений результат на те число, яке він задумав, потім додати до останньої частки задумане число. Нехай тепер він скаже вам результат. Знаючи результат, ви відразу ж вгадаєте число, яке задумав ваш товариш.

Секрет дуже простий. Той, хто вгадує, також повинен задумати довільне число (наприклад, 1) й виконувати над цим числом всі пропоновані ним множення і ділення аж до ділення на спочатку задумане число. Тоді в частці у нього вийде те саме число, що й у другого товариша, хоч би вони й задумали різні числа. Після цього той, хто вгадує, повинен відняти від сказаного йому результату свій результат. Різниця і буде шуканим числом.

Приклад. Задумано число 7. Помножено на 12. Результат (84) поділено на 2. Знайдене число (42) помножено на 5. Результат (210) поділено на 3. Вийшло 70, а після ділення на задумане число й додавання задуманого числа — 17.

Одночасно ви задумали число 1. Помножаєте на 12, виходить 12. Ділите на 2, виходить 6. Помножаєте на 5, виходить 30. Ділите на 3, виходить 10. Віднімаючи 10 від 17, дістанете шукане число 7.

Зауваження 1. Щоб підсилити ефект, ви можете дати можливість тому, хто задумав число, називати числа, на які йому хотілося б множити і ділити знайдені результати, аби тільки він щоразу говорив вам ці числа.

Зауваження 2. Не обов'язково чергувати множення і ділення. Можна спочатку призначати кілька множень, а потім кілька ділень, або навпаки.

Фокус 3. Задумайте яке-небудь число (менше 100, щоб не ускладнювати обчислень) і піднесіть його до квадрата. До задуманого числа додайте будь-яке число (тільки скажіть, яке) і знайдену суму також піднесіть до квадрата. Знайдіть різницю знайдених квадратів і скажіть результат. Щоб вгадати задумане число, досить половину цього результату поділити на число, додане до задуманого, а від частки відняти половину дільника.

Приклад. Задумано 53, $53^2 = 2809$. До задуманого числа додано 6:

$$53 + 6 = 59, 59^2 = 3481, 3481 - 2809 = 672. \text{ Цей результат сказано.}$$

Вгадуємо: $672 : 12 = 56$, $6 : 2 = 3$, $56 - 3 = 53$. Задумане число 53.

Наступні два фокуси ілюструють це положення. Ці фокуси можна проводити як з одним учасником, так і з групою учасників.

Фокус 4. Запропонуйте помножити задумане число на довільно вибране вами число, а до знайденого добутку додати число, також довільно вами вибране. Суму запропонуйте поділити на третє намічене вами число. Ви в цей час поділіть у думці перше з названих вами чисел на третє і, діставши в частці якесь число, запропонуйте учасникові фокуса стільки ж разів відняти від знайденої ним частки задумане число. Цей останній результат ви і вгадаєте. Він дорівнюватиме частці від ділення другого з запропонованих вами чисел на третє.

Приклад. Припустимо, що задумано 6. Ви пропонуєте помножити задумане число на 4 (запам'ятайте для себе це число, як перше). Виходить 24. Пропонуєте додати 15 (друге число); виходить 39. Пропонуєте поділити на 3 (третє число); виходить 13. Обчислення в думці: $4 : 3 = 1 \frac{1}{3}$. Пропонуєте учасникові фокуса відняти від знайденої ним частки (від 13) задумане число та ще одну третину його. Він віднімає 6 та ще 2 — всього 8 і дістає $13 - 8 = 5$.

Ви в цей час в думці ділите друге з запропонованих вами чисел (15) на третє (на 3) і також дістаєте число 5, яке й говорите як очікуваний результат.

Доведіть, що такий збіг результатів не випадковий, а цілком закономірний.

Фокус 5. Напишіть яке-небудь число між 1 і 50 на клаптику паперу і заховайте його, не показуючи учасникам фокуса.

Нехай кожний учасник в свою чергу напише будь-яке число, більше 50, але менше 100, і, не показуючи вам, виконає такі дії:

- 1) додасть до свого числа $99 - x$, де x — число, написане вами на клаптику паперу (цю різницю ви в думці підрахуйте і скажіть учасникам фокуса тільки готовий результат);
- 2) закреслить у знайдений сумі крайню ліву цифру і цю саму цифру додасть до числа, яке лишилося;
- 3) знайдене число відніме від числа, яке він спочатку написав.

В результаті всі учасники дістануть одне й те саме число, саме те, яке ви написали спочатку на клаптику паперу.

Приклад. Число, яке ви написали і заховали, 18; число, яке написав один з учасників, 64. Пропонуйте додати $99 - 18 = 81$. Виходить: $64 + 81 = 145$.

Цифру 1 закреслюють і додають її до числа, яке залишилось, $45 + 1 = 46$. Різниця між задуманим числом (64) і знайденим (46), $64 - 46 = 18$, якраз і дає заховане вами число (18).

Як і завжди, ви, звичайно, насамперед намагатиметесь зрозуміти математичну основу можливості передбачення результату виконання зазначених дій.

Хто скільки взяв, я взнав

Нехай перший учасник фокуса візьме будь-яку кількість предметів (сірників, монет і т. д.), кратну 4. Другий нехай візьме стільки разів по 7 предметів, скільки перший взяв по 4. А третього учасника попросить взяти стільки ж разів по 13 предметів.

Тепер нехай третій учасник з числа взятих ним предметів віддасть першому і другому стільки, скільки в кожного з них вже є. Потім нехай другий учасник віддасть третьому і першому стільки предметів, скільки в кожного тепер є. Нарешті, і перший нехай зробить те саме.

Запитайте у будь-якого з цих учасників фокуса, скільки предметів у нього тепер. Число, яке він вам назве, поділіть на 2. Частка покаже, скільки предметів спочатку взяв перший учасник. Число предметів, взятих першим, поділіть на 4 і помножьте на 7. Це буде число предметів, взятих другим учасником. А третій взяв стільки разів по 13 предметів, скільки другий взяв по 7.

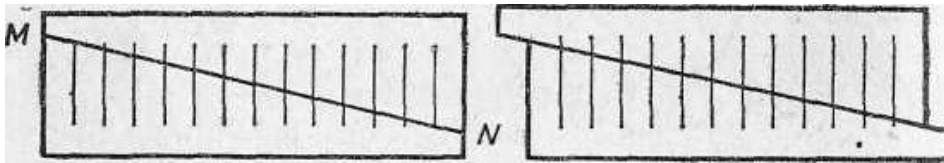
Обґрунтувати фокус дуже легко.

Вгадати вік

Щоб різноманітнити фокус, можна запропонувати помножити число років на 2, додати 5, а суму знову помножити на 5; попросити сказати результат. Остання цифра результату, очевидно, буде 5. Треба її відкинути, а від числа, яке лишилось, відняти 2. Різниця — шуканий вік.

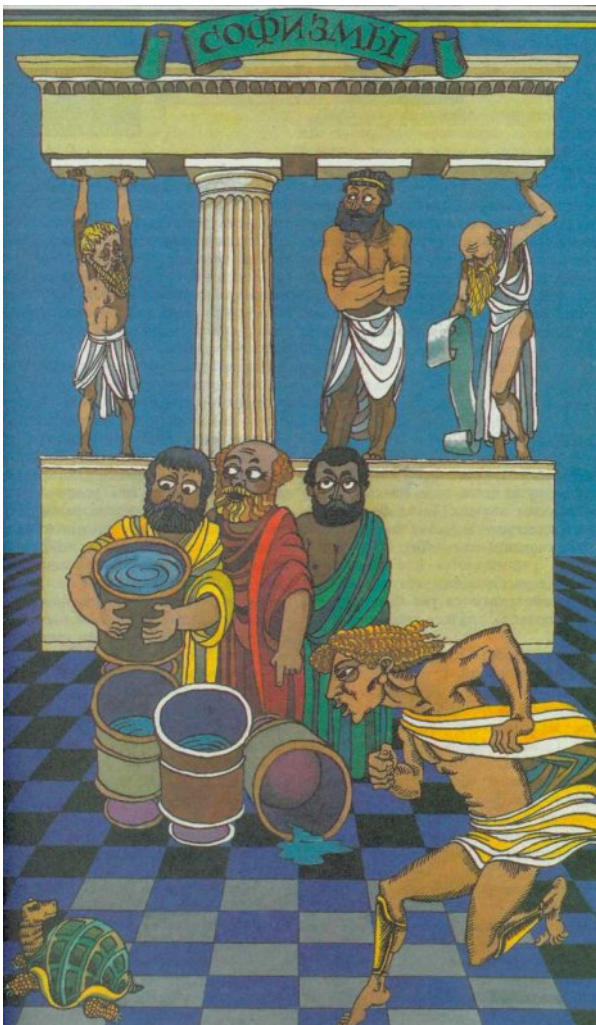
Приклад. Нехай вік 21 рік. Виконаємо такі дії: $21 - 2 = 42$, $42 + 5 = 47$, $47 - 5 = 235$. Вгадуємо вік: $23 - 2 = 21$. Доведіть цей варіант угадування віку.

Геометричний фокус (загадкове зникнення)



Накресліть на прямокутному листі картону 13 однакових паличок на однаковій відстані одну від одної, як показано на рис. 186. Тепер розріжте прямокутник по похилій прямій MN, яка сполучає верхній кінець найлівої палички і нижній кінець найправішої. Зсуньте обидві половинки, прямокутника вздовж лінії розрізу, як показано на рисунку.

Маємо цікаве явте: замість 13 паличок їх стало 12! Куди зникла одна паличка?



3.3. СОФІЗМИ

...Арифметика — наче вхідна брама до всіх інших наук, бо без її пізнання ніхто не може зробити жодного кроку вперед до храму науки...

ФЕОФАН ПРОКОПОВИЧ

ПЕРША НЕСПОДІВАНКА

3 = 5? Знайдіть помилку у міркуваннях.

Маємо очевидну рівність $25 - 15 - 10 = 15 - 9 - 6$,
звідки $5(5 - 3 - 2) = 3(5 - 3 - 2)$, або $5 = 3$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

Не потрібно плутати те, що нам здається неймовірним і неприродним, з абсолютно неможливим.

К. Ф. Гаусс

1. Переглядаючи науково-популярний журнал, учень натрапив на повідомлення про різні вдосконалення в роботі парової машини, кожне з яких, незалежно від інших, давало значну економію пального. Перше вдосконалення мало дати 40% економії, друге — 35%, третє — 25%.
- Ура! — вигукнув учень. — Нарешті винайдено вічний двигун. Приймаючи всі три пропозиції, дістанемо 100% економії пального:

$$40\% + 35\% + 25\% = 100\%.$$

А це означає, що парова машина працюватиме без використання пального, тобто стане вічним двигуном. Чи справді це так?

Розв’язання. Нехай машина потребує 100 кг пального. Впровадження пропозиції першого раціоналізатора дасть 40 кг економії, і пального потрібно буде $100 - 40 = 60$ кг. Впровадження другої пропозиції (незалежно від першої) дасть економії 21 кг ($60 \cdot 35\% = 21$ кг), і машина після цього потребуватиме $60 - 21 = 39$ (кг) пального. Впровадження третьої пропозиції дало б $39 \cdot 25\% = 9,75$ (кг) економії пального, і для роботи машини після впровадження всіх трьох пропозицій потрібно було б витратити $39 - 9,75 = 29,25$ (кг) пального. Тому економія від впровадження всіх трьох пропозицій становитиме 70,75 %.

2. На складі є 100 кг ягід. Проведений аналіз показав, що в ягодах міститься 99% води. Через деякий час аналіз повторили. Виявилось, що кількість води в ягодах зменшилася до 98%. Яку масу тепер мають ягоди?
3. *Підступний заповіт.* Французька графиня Елізабет-Анжеліка де Боутвіль овдовіла в 20 років. Її люблячий чоловік — губернатор Сенліса залишив такий заповіт: за перший рік після його смерті вдові має виплачуватися 1 золота монета, а якщо вона не вийде знову заміж, кожного наступного року вона має одержувати вдвічі більше, ніж попереднього. Графиня прожила ще 69 років і не вийшла знову заміж. На яку суму грошей вона отримала право?

Відповідь. На суму 147 573 952 314 798 506 112 золотих монет. Такої суми грошей не існує в усіх банках світу.

4. Візьміть аркуш паперу завтовшки, наприклад, 0,1 мм. Складіть його пополам, потім ще раз пополам і т. д. Звичайно, виконати таку операцію ви зможете разів 8—10, не більше. Але якщо б вам вдалося зробити це, скажімо, 40 раз, якої товщини досяг би складений аркуш паперу?

Розв'язання. Товщина стосу аркушів паперу буде в 2^{40} разів більша ніж товщина взятого аркушу паперу, тобто становитиме $1 \cdot 2^{40} = 109\,951\,162\,777,6$ мм, близько 110 тис. км. Це трохи більше, ніж третина відстані від Землі до Місяця.

5. *Куди поділася 1 копійка?* (Із задач Л. М. Толстого). Дві селянки продавали яблука, кожна по 30 штук. Перша продавала за 1 Копійку 2 штуки, а друга за 1 копійку — 3 штуки. Перша вторгувала 15 копійок, друга — 10 копійок. Якось друга селянка не змогла піти на базар і попросила першу продавати її яблука. Та продавала 5 яблук за 2 копійки, оскільки вона за 1 копійку продавала свої 2 яблука, а її сусідка — за 1 копійку 3 яблука.

У першої селянки було тепер 60 яблук. Вона зробила 12 купок по 5 яблук, продала кожну за 2 копійки і була здивована, що вторгувала не 25, а тільки 24 копійки. Куди поділася 1 копійка?

Розв'язання. Першого разу селянка продавала свої яблука по 0,5 коп., а другого разу свої і сусідчині продавала по 0,4 коп., тому вона втратила на своїх яблуках $(0,5 - 0,4) \cdot 30 = 3$ (коп.), але за яблука сусідки вона вторгувала більше, ніж вторгувала б сусідка на $(0,4 - 1/3) \cdot 30 = 2$ (коп.). Отже, загальна втрата й становить $3 - 2 = 1$ (коп.).

6. *Де ще один франк?* Ввечері до готелю французького міста приїхали три туристи. Господар повідомив, що нічліг буде коштувати кожному 10 франків. Але коли гості розрахувалися і розмістилися в кімнатах, господар вирішив, що йому буде досить 25 франків і доручив посильному повернути туристам 5 франків. Посильний, не знаючи, як розділити 5 франків між трьома туристами, вирішив для простоти обчислень залишити собі 2 монети, а туристам повернув по одній монеті, і всі були задоволені.

Потім він підвів підсумок і був здивований, бо вийшло ось що: гості заплатили разом $9 \cdot 3 = 27$ франків, два франки посильний залишив собі. Отже, всього від подорожніх одержали $27 + 2 = 29$ франків. Але ж господар одержав спочатку 30 франків? Куди ж подівся 1 франк?

Розв'язання. Посильний був нечесний і погано знав арифметику. Коли господар готелю повернув 5 франків, у нього залишилося 25 франків. Але кожний турист одержав назад по 1 франку, тобто вони сплатили 27 франків, а це на 27—25 франки більше, ніж одержав господар готелю. Це і є ті 2 франки, які привласнив собі посильний.

7. Описуючи життя Архімеда, римський історик Плутарх стверджує, що великий математик вважав механізм важеля настільки досконалим, що сказав: «дайте мені точку опори – і я зрушу землю». А якщо й справді мати десь поза Землею точку опори, то якої довжини повинно бути одне плече важеля, щоб другим кінцем підняти Землю на один сантиметр?

Розв'язання. Маса Землі становить $6 \cdot 10^{24}$ кг. Припустимо, що людина може підняти за 1 с 60 кг на висоту 1 м. Тоді одне плече важеля має бути у стільки разів довшим за друге, у скільки $6 \cdot 10^{24}$ більше за $6 \cdot 10$, тобто в 10^{23} рази. Якщо кінець короткого плеча важеля (до якого прикріплено Землю) підніметься на 1 см, то кінець довгого опуститься на $1 \text{ см} \cdot 10^{23} = 1 \text{ м} \cdot 10^{21} = 10^{18}$ км. Ця відстань в 6000 мільйонів разів більша за відстань від Землі до Сонця. Якщо швидкість опускання становила б 1 м/с, то рух довшого плеча мав продовжуватися 10^{12} років. Навіть, якщо це опускання відбуватиметься із швидкістю світла, то для завершення руху буде потрібно 100 000 років.

Не випадково Архімедів важіль — один з найпопулярніших крилатих висловів.

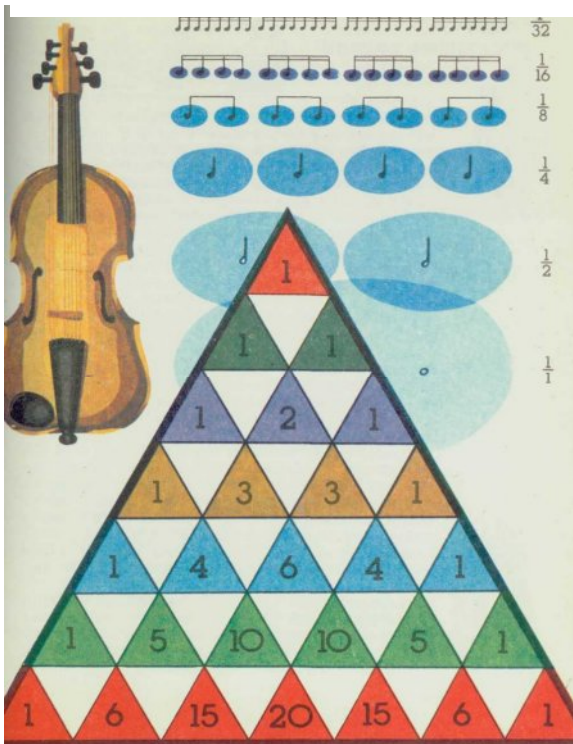
От і закінчилася перша наша подорож у світ дивовижних витворів людської думки — софізмів та парадоксів. Час зробити перші висновки і зазирнути за горизонт.

Кожний наведений приклад — софізм був пов'язаний з деякою суперечністю, зумовленою більш або менш вдало замаскованими помилками в

міркуваннях. Попереду нас чекають зустрічі із суперечностями істотно іншого роду — парадоксами. Парадокси є вузловими центрами, віхами розвитку кожної науки, які відбивають суперечливість явищ природи і поява яких свідчить про необхідність перегляду усталених меж тих чи інших понять і теорій. З парадоксами ми зустрінемось у 7 класі.

3.4. МАТЕМАТИКА + ЛІТЕРАТУРА = ?

Математику й письменство інколи ставлять на протилежних полюсах



людського знання. Проте мости між літературою й точними науками ніколи не були розведеними. Бо не можна відділити людський інтелект від емоцій. І холодні формули не ізольовані від гарячого випромінювання людських почуттів. «Дедалі мистецтво стає науковим, а наука — художньою; розлучившись біля підніжжя, вони зустрінуться коли-небудь на вершині», — сказав Г. Флобер.

З різних причин математика проникала в літературу, навіть тому, що осягнення драматичного змісту життя потребувало його логічного впорядкування. І тут, зрозуміло, йдеться зовсім не про математизацію літератури.

Разом з тим кузен Жюль Верна математик Анрі Гарсе зробив на його прохання обчислення для його роману «Із Землі на Місяць», які обґрунтовували можливість міжпланетної подорожі, якщо відразу снаряду буде надано початкової швидкості 11 км/сек. Математичні викладки внесені в текст роману.

Цей приклад не виняток у красному письменстві. Та хіба може бути інакше? Адже розв'язування задач — основа всього нашого існування. Великі й малі, вони атакують нас щоденно, щогодинно.

Шерлок Холмс не стільки шукав злочинців, скільки обчислював їх за допомогою логічного аналізу наявних, як правило, досить незначних фактів.

Вивчення математики в школі часто залишає сліди на все життя. І не завжди приємні. В «Автобіографії», відомому творі класика сербської літератури Бранислава Нушича, першому кохання відведено 7 сторінок, а шкільній математиці — 12.

Наведеними далі прикладами освоєних письменниками островів безмежного океану математики прагнемо рівною мірою привернути увагу читачів до математики і до літератури — двох могутніх знарядь пізнання і перетворення навколишнього світу, частиною якого є й сама людина.

Почнемо з часів майже апокрифічних. У IV ст. жив грецький епіграміст, автор праць з географії й астрономії Метродор. В історію математики й математичних головоломок він ввійшов як автор понад 30 цікавих задач, складених у віршованій формі. Задачі Метродора входили в рукописні збірники і в свій час були дуже поширеними. Дві епіграми із спадщини Метродора в перекладі українською мовою І. Я. Франка і відкривають цей розділ.

1. Учні Піфагора

«Піфагоре благородний,
Геліконських муз потомку,
На моє скажи питання,
Скільки учеників годних
Маєш ти у своїм домі,
Що, немов борці на площі,
Раді премії добитися?»
«Радо скажу, Полікрате.
Бачиш, учнів половина
Математику зглубляє,
А натомість четвертина
На безсмертну природу
Свої досліди звертає.

Сьома часть ніщо не робить,
Лиш заховує мовчання,
Лиш моє у душах своїх,
Знай, ховаючи мовчання.
Ще додай до них три жінки,
Що встають не дуже рано,—
Серед них найвизначніша
Моя любая Геано.
Ось і всі, яких по змозі
Я до мудрості доводжу,—
Може, муз їм піерійських
Позискаю ласку божу».
Скільки ж учнів у Піфагора?

Відповідь. 28 учнів.

2. Коли Санчо Панса вступав на високу посаду губернатора острова Бараторія, він запрягнувся дотримувати всіх законів. Скоро його попросили поради, як можна виконати один дуже дивний закон у не дуже дивній ситуації.

Річка поділяє маєток на дві частини. Через річку перекинуто міст, тут же, скраю, стоїть шибениця і постійно засідає щось на зразок суду, який діє на основі суворого закону власника маєтку. Кожен, хто приходить до мосту, зобов'язаний сказати, куди й чого він іде. Хто скаже правду, наказано відпускати, того ж, хто збреше,— карати без усякої поблажливості. За час дії закону багато людей пройшло по мосту, говорили правду і простували далі в своїх справах. Та якось один пішохід заявив суду, що пройшов тільки тому, щоб його скарали на шибениці, яка стоїть поруч. Слова пішохода збентежили суддів. Якщо дозволити йому без перешкод іти далі, то це означатиме, що він сказав неправду і заслуговує покарання; якщо ж його скарати, то, оскільки він і казав, що прийшов саме тому, щоб його скарали, пішохода згідно із законом необхідно відпустити.

Санчо Панса вважав, що в пішохода-дивака стільки ж шансів умерти, скільки й лишитися живим. Отже, є однакові підстави, щоб його скарати і виправдати. Оскільки ж робити добро завжди правильніше, ніж зло, то дивака варто відпустити. Чи буде при цьому дотримано закону власника помістя?

Вказівка. Потрібно розрізнити намір пішохода-дивака і майбутню подію, незалежну від його наміру. Якщо йшлося про намір дивака закінчити своє життя на згаданій шибениці, то він міг сказати правду (тобто й справді міг хотіти розпрощатися з життям у такий спосіб). У цьому випадку його бажання не могли задовольнити судді, і ніякої суперечності тут не виникає. Закон власника помістя тут виконаний. Якщо ж висловлене диваком твердження стосувалося майбутньої події незалежно від його бажання, то воно стає парадоксом. Будь-який вирок суддів суперечитиме закону.

Вміщені в «Мудрості вимислу» й цікаві задачі, які й сьогодні служать надійним знаряддям тренування кмітливості і винахідливості.

3. І. А. Крилов у байці «Бідний багач» розповів таку історію.

До бідняка з'явився чорт і подарував йому чарівний гаманець з одним червінцем усередині. Як тільки З гаманця виймали червінець, у ньому з'являвся другий. Бідняк міг вийняти з гаманця скільки завгодно червінців з однією лише умовою: перш ніж почати витратити їх, він повинен був кинути в річку гаманець.

Бідняком оволоділа жадібність. Він діставав з гаманця червінець за червінцем.

...Проходить день, тиждень, місяць, рік...

По чуть лишь день, а он опять за ту ж работу...,

Бедняк мой похудел...

Он стал и слаб и хил...

И чем же кончил он?

На лавке, где своим богатством любовался,

На той же лавке он скончался,

Досчитывая свой девятый миллион.

Скільки часу могла тривати така історія?

Розв'язання. Припустимо, що бідняк дістав двісті червінців за годину й працював по 15 годин на день. Тоді він діставав 3000 червінців за день і близько 1 000 000 за рік.

Отже, гаманець був у його руках понад дев'ять років. За цей час можна посивіти ... Крилов обґрунтував свою байку математично.

Сучасники М. Ю. Лермонтова, які близько знали його, розповіли про математичні захоплення поета. Так, О. О. Лопухін, товариш Лермонтова по кавалерійському училищу, писав, що одного разу, приїхавши до нього в Москву, Лермонтов замкнувся в кабінеті і до пізньої ночі розв'язував якусь математичну задачу. Не розв'язавши її, змучений поет заснув. Задачу він розв'язував уві сні. Йому приснилося, що прийшов якийсь математик і підказав йому розв'язання задачі. Поет успішно демонстрував свою математичну вправність і в зовсім несподіваних ситуаціях.

4. На початку 1841 р. Тенгінський полк стояв у Анапі. Нудьгуючі офіцери, серед них і Лермонтов, збиралися один в одного. Якось мова зайшла про вченого кардинала, який міг розв'язувати в думці найскладніші математичні задачі.

— Що ви скажете на це, Лермонтов? — звернувся до поета поважний командир, старий батальйонний з Георгієм. — Кажуть, ви теж добрий математик?

— Нічого тут дивного немає, — відповів поет. — Я теж можу продемонструвати вам, якщо хочете, дуже цікавий приклад математичних обчислень.

— Будь ласка.

— Задумайте яке завгодно число, і я за допомогою простих арифметичних дій визначу це число.

— Ну що ж, спробуйте, — розсміявся старий, який, мабуть, відчув сумнів. — Але яке ж велике має бути задумане число?

— А це вже байдуже. Та на перший раз, щоб швидше обчислювати, обмежимося числом з двох цифр...

Поет запропонував батальйонному додати до задуманого числа 25, потім ще 125, від суми відняти 37 і задумане число, різницю помножити на 5, добуток поділити на 2 і назвав остаточний результат: 282.

Командир аж підскочив від здивування, назвавши поета ворожбитом.

— Ворожбит не ворожбит, а математику вивчав,— усміхнувся Лермонтов.

Старий ще раз випробував математичний хист Лермонтова. Після цього, де б поет не з'являвся, до нього зверталися з проханням відгадати задумане число. Через кілька днів, коли замовлення набридли поету, він розкрив таємницю своєї математичної ворожби. У чому полягала ця таємниця?

Відповідь. Вона полягає в тому, що людина, яка задумала число, яке б воно не було, потім віднімає це число від суми того самого числа і деяких інших підказаних чисел. Тому демонстратору математичного фокуса легко підрахувати остаточний результат.

Наприклад: $((x + 100 + 206 + 310 + 500 - x) : 2) \cdot 3 = 174$.

3.5. ГОДИННИК І КАЛЕНДАР

1. Чи може в деякому місяці бути 5 неділь?

Розв'язання. Для того, щоб у місяці було 5 неділь, його початок повинен і припадати на неділю (якщо в місяці 28 днів), або на суботу чи неділю (якщо в місяці 29 днів), або на п'ятницю, суботу чи неділю (якщо в місяці 31 день).

2. Чи може місяць одночасно мати п'ять неділь і п'ять серед?

3. Яка найбільша кількість п'ятниць може бути у році?

4. У липні деякого року було чотири п'ятниці і чотири понеділки. Яким днем тижня було 22 число цього місяця?

5. У деякому місяці було чотири понеділки, п'ять четвергів та чотири суботи. Яким днем тижня було 20 число цього місяця?

Розв'язання. Якщо в місяці 29 днів, то вівторком; якщо в місяці 30 днів, — понеділком або вівторком; якщо в місяці 31 день, — неділею.

6. У деякому місяці 3 неділі припали на парні числа. Яким днем тижня було 20 число цього місяця?

7. Михайлик каже: «Позавчора мені було ще тільки 10 років, а наступного року буде 13». Коли у Михайлика день народження?

Розв'язання. Якщо Михайликові 31 грудня виповниться 11 років, то 1 січня він дійсно зможе сказати, що позавчора, тобто 30 грудня, йому було тільки повних 10 років. 31 грудня поточного року йому виповниться 12, а наступного року 13.

8. Якось перший вівторок місяця я провів у Києві, а перший вівторок після першого понеділка — у Львові. У наступному місяці я перший вівторок провів у Одесі, а перший вівторок після першого понеділка — у Миколаєві. Якого числа і якого місяця я був у всіх цих містах?

Розв'язання. 1 лютого — у Києві, 8 лютого — у Львові; 1 березня — в Одесі, 8 березня — в Миколаєві.

9. У Віталія немає календаря на 2003 рік, але є чимала колекція календарів за минулі роки. Календарем за який рік він може його замінити?

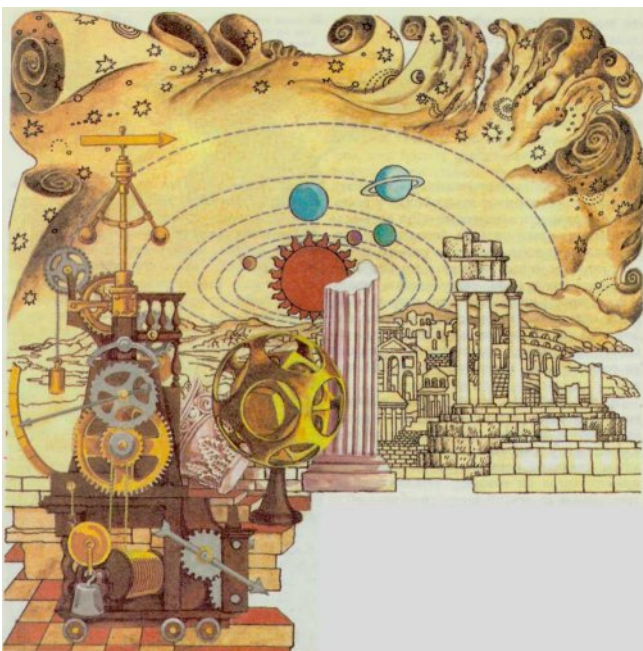
10. Чи правильно, що 29 лютого 1900 року була п'ятниця?

Вказівка. Високосним роком називається кожен рік, число якого ділиться на 4, крім років, які закінчуються двома нулями, але не діляться на 400. Тому

1900 рік не був високосним і в лютому 1900 року було 28 днів.

11. Доведіть, що кожного року 13 число якогось місяця припадає на понеділок.

Доведення. У невисокосні роки: якщо 1 січня — понеділок, то 13 серпня — понеділок; якщо 1 січня — вівторок, то 13 травня — понеділок; якщо 1 січня — серeda, то 13 січня і 13 жовтня — понеділок; якщо 1 січня — четвер, то 13 квітня і 13 липня — понеділок; якщо 1



січня — п'ятниця, то 13 вересня і 13 грудня — понеділок; якщо 1 січня — субота, то 13 червня — понеділок; якщо 1 січня — неділя, то 13 лютого, 13 березня і 13 листопада — понеділок. Щодо високосних років — переконайтеся самостійно.

12. Фантастичний роман починається словами: «Чергове століття настало у неділю». Вкажіть помилку в цій фразі.

Вказівка. Наш григоріанський календар має період 400 років. Кожен четвертий рік — високосний, при цьому роки, що діляться на 100 і не діляться на 400, не є високосними. Весь цикл містить 20871 тиждень. Першим днем століття може бути або вівторок (1 січня 1901 року), або понеділок (1 січня 2001 року), або субота (1 січня 2101 року), або четвер (1 січня 2201 року). Далі все повторюється.

13. Чи правильно, що 13-те число частіше припадає на п'ятницю, ніж на будь-який інший день тижня?

Вказівка. Підрахуйте, скільки разів за 400 років (див. попередню задачу) 13 число припадає на п'ятницю, а скільки — на інші дні тижня.

14. Годинник за кожну добу спішить на 3 хвилини. Зараз він показує точний час. Через який час його стрілки знову показуватимуть точний час?

Розв'язання. Годинник знову показуватиме точний час, коли піде вперед на 12 годин. Це трапиться через $12 \cdot 60 : 3 = 240$ діб.

15. Годинникар правильно виставив час на настінному годиннику та будильнику, незважаючи на те, що настінний годинник відстає на 2 хв за годину, а будильник іде вперед на 1 хв за годину. Наступного дня ці годинники зупинилися одночасно. Стрілки настінного годинника показували 7-у годину, а будильника — 8-у годину. О котрій годині було виставлено час?

16. Годинник б'є по одному удару кожні півгодини, кожну годину — число годин. Зранку годинник завели. Він зупинився, коли зробив 29 ударів. О котрій годині годинник зупинився?

Розв'язання. Таке могло трапитися, якщо годинник завели між 4:30 і 5:00 годинами (тоді він зупинився між 8:00 та 8:30); між 7:30 і 8:00 годинами (тоді він зупинився між 10:00 та 10:30); між 10:30 і 11:00 годинами (тоді він зупинився між 13:00 та 13:30, якщо мати на увазі що о 13:00 він б'є один раз).

17. Скільки часу протягом доби на табло електронного годинника, який показує години та хвилини, світиться цифра 2?

18. Годинник показує першу годину дня. Знайдіть найближчий момент часу, коли годинна та хвилинна стрілки збігатимуться.

Розв'язання. За 60 хвилин годинна стрілка проходить $\frac{1}{12}$ кола, а хвилинна — повне коло. Тобто за хвилину кут між годинною та хвилинною стрілкою

зменшується на $\frac{1}{60} - \frac{1}{12 \cdot 60} = \frac{11}{12 \cdot 60}$ частину повного кола. О першій годині

дня кут між стрілками складає $\frac{1}{12}$ частину кола, тому стрілки

збігатимуться вперше після 13.00 через $\frac{1}{12} \div \frac{11}{12 \cdot 60} = \frac{60}{11}$ хвилини, тобто

майже о 13:05:27.

19. Знайдіть найближчий після 12-ї години момент часу, коли годинна та хвилинна стрілки взаємно перпендикулярні.

20. Скільки разів протягом доби годинна і хвилинна стрілки: а) збігаються; б) утворюють розгорнутий кут; в) утворюють прямий кут?

21. Яким був мінімально можливий час проведення періоду хокейного матчу, якщо відомо, що в момент його початку і закінчення годинна і хвилинна стрілки були взаємно перпендикулярні?

22. Зараз Михайликові 11 років, а Андрійкові 1 рік. Скільки років буде Михайликові та Андрійкові, коли Михайлик буде втричі старший від Андрійка?

Розв'язання. Оскільки Михайлик буде втричі старший від Андрійка, то різниця у їхньому віці дорівнюватиме подвоєному віку Андрійка. Вікова різниця не

змінюється з часом, тобто вона дорівнює $11 - 1 = 10$. Отже, Андрійкові буде 5, а Мишкові — 15 років.

23. Батькові стільки років, скільки синові та доньці разом. Син удвічі старший від сестри і на 20 років молодший від батька. Скільки років кожному?
24. Батько старший від сина у 4 рази. Через 20 років він буде удвічі старший від сина. Скільки років зараз батькові?
25. Усім членам однієї родини разом зараз 73 роки. До складу сім'ї входять: чоловік, дружина, донька та син. Чоловік старший від дружини на 3 роки, донька старша від сина на 2 роки. Чотири роки тому їм разом було 58 років. Скільки зараз років кожному?

ВІДПОВІДІ:

2. Ні. 3. 53 4. Вівторком
6. Четвергом. 9 За 1997 рік 10 ні
12 чергове століття не може починатися у неділю.
13 п'ятниці і неділі рідше за все припадають на 13 число.
15 Об 11:40 минулого дня.
17 10,5 годин
19 Майже о 12:16:22
20 а) 23 рази; б) 22 рази; в) 44 рази
21 Майже 0:32:44.
23 Батькові — 60 років, синові — 40, доньці — 20
24 40 років.
25 Чоловікові — 34 роки, дружині — 31, доньці — 5, синові — 3.

3.6. МАТЕМАТИЧНІ ВІКТОРИНИ

Математичну вікторину рекомендуємо проводити як на уроках так і в позаурочний час, рідко практикують як самостійний захід у позакласній роботі.

У вікторині можуть брати участь усі, хто бажає. Пропонують здебільшого 6-12 запитань і задач. Вікторину, залежно від числа учасників, можна проводити по-різному.

Пропонуємо декілька варіантів проведення математичних вікторин.

Перший варіант

Кожне запитання або задачу зачитує вчитель чи учень, який проводить вікторину. На обдумування відповіді дається декілька хвилин. Відповідає той, хто перший підніме руку. Якщо відповідь неповна, то можна дати можливість висловитись ще одному учаснику вікторини. За повну відповідь присуджують два очка, за неповну, але задовільну — одне очко.

Переможцями вважаються ті учасники вікторини (2—4 учні), які набрали найбільше число очок. Окремі задачі і запитання лише зачитують, умови інших задач можуть бути записані на дошці. Так можна проводити вікторину, коли в ній бере участь порівняно небагато (20 – 30) учнів.

Другий варіант.

Якщо у вікторині бере участь багато (50 – 100) учнів, то її проводять так.

Тексти всіх запитань і задач виписують (заздалегідь) на дошці або на окремих аркушах, які роздають учням. Кожному учасникові видають аркуш чистого паперу, на якому він записує відповідь та коротке пояснення до кожного запитання і задачі, а також своє прізвище, ім'я, клас. Цей аркуш він здає журі вікторини. Через певний час після початку вікторини (наприклад, через 30 хв) приймання аркушів від учасників вікторини припиняють. Журі перевіряє розв'язання і виявляє переможців. До журі вікторини входять звичайно 5—7 членів гуртка. З гуртківців вибирають також ведучого вікторини.

Переможцям видають нагороди (найчастіше книги з математики).

Бажано, щоб запропоновані на вікторині задачі і запитання були хоча б частково розібрані. Не можна перетворювати вікторину в олімпіаду. Олімпіада є набагато відповідальнішою формою змагань. Тривалість вікторини — не більш як 25—40 хв.

Задачі для вікторини повинні бути невеликими, доступними для усного розв'язування. Крім задач, у вікторину можна включати також різні запитання з математики або з історії математики, з інших базових дисциплін.

У вікторину включають також задачі-жарти. Її можна присвятити повністю якій-небудь одній темі, наприклад прийомам раціональних обчислень, арифметичним задачам на міркування і т. д. Але найкраще пропонувати комбіновані запитання. Слово для відповіді надають учневі, який перший підняв руку (але слід намагатися залучати до роботи як найбільше учасників).

Ведучий називає лідера «змагання».

Наведемо для прикладу ряд питань та задач, які можуть бути запропоновані для проведення вікторини.

1. Скільки кінців у трьох палок? У чотирьох з половиною палок? У двох з четвертю?
2. Летіли галки і побачили палки. Якщо на кожному палку сяде одна галка, то для однієї галки не вистачить палки. Якщо на кожному палку сяде по дві галки, то одна з палок залишиться без галок. Скільки було галок і скільки було палок?

Відповідь. 3 палки і 4 галки.

3. Два автомобілі їхали по шосейній дорозі і проїхали 120 км. Скільки кілометрів проїхав кожний автомобіль?
4. Двоє батьків і двоє синів поділили між собою порівну 30 крб., причому кожен одержав по 10 крб. Як це могло трапитись?

Відповідь. Було 3 особи: батько, син і внук.

5. Який знак треба поставити між записаними цифрами 2 і 3, щоб мати число більше за 2, але менше за 3?

Відповідь. Кому.

6. Поділити півсотні на половину; 1 крб. на 0,2

Відповідь: 100; 5 крб.

7. Один громадянин писав про себе: «...Пальців у мене двадцять п'ять на одній руці, стільки ж на другій, на ногах десять...» Чому він такий потворний?

Відповідь. Громадянин після слова «двадцять» не поставив дві крапки.

8. Два півні можуть своїм співом розбудити одну людину; скількох людей розбудять своїм співом 6 півнів?
9. На відстані 15 км чути гудок заводської труби. На яку віддаль треба відійти, щоб з такою самою силою було чути гудки чотирьох таких самих заводських труб?
10. Швачка має кусок сукна 18 м і щодня відрізає по 3 м. На який день вона відріже останній раз?

Відповідь. На п'ятий.

11. Летіла група качок. Одна попереду, дві позаду; одна позаду і дві попереду; одна між двома і три в ряд. Скільки летіло качок?

Відповідь. Летіли одна за одною три качки.

12. Коли моєму батькові минув 31 рік, мені було 8 років, а тепер батько старший за мене вдвічі. Скільки мені тепер років?

Розв'язання: Різниця наших років становить 23 роки (31—8). Ці 23 роки і є мій теперішній вік, бо різниця наших років стала, 1 на той час, коли мені 23 роки, моєму батькові 46 років, тобто якраз вдвічі більше, ніж мені.

13. Розділити 10 апельсинів порівну між 12-ма особами, при умові, що різати кожний апельсин можна не більш як на 3 рівні частини.

Розв'язання: 6 апельсинів ріжемо пополам, а кожний з решти — на 3 рівні частини, після чого даємо кожній особі пополовині і одній третині апельсина.

14. На дереві сиділо 6 горобців. Стрілець, вистріливши, влучив у двох із них. Скільки горобців залишилося на дереві?

Відповідь. Жодного,— всі інші полетіли.

15. Півтори курки за півтора дня знесуть півтора яйця. Скільки яєць знесуть 3 курки за 4 дні?

Відповідь. 8.

16. Одне яйце варять протягом 4 хв. Тоді воно вважається звареним. За скільки хвилин можна зварити 5 яєць?

Відповідь. За 4 хв.

17. Щука важить стільки, скільки важить кілограм та півщуки. Яка вага щуки?

Відповідь: 2 кг.

18. Яке число треба поділити на свою п'яту частину, щоб дістати 5?

Відповідь: Довільне число.

19. Селянин ішов до залізничної станції і зустрів 2 бабусі, кожна з яких несла по два кошики, а в кожному кошику було по два кролі. Скільки йшло до станції?

Відповідь: Один селянин.

20. На глобусі через один градус проведені паралелі. Скільки всього кіл побудовано на глобусі?

Відповідь: 179.

21. Один робітник одержував за день стільки карбованців, скільки днів він працював, а другий одержував за день на 1 крб. більше від першого, але працював на один день менше. Хто з них більше одержав грошей?

Розв'язання: Одержав більше перший і лише на 1 крб. Щоб пересвідчитись у цьому, треба взяти будь-яке ціле число, вважати його за кількість робочих днів першого робітника, а потім зробити все за умовою задачі. Яке б число ми не взяли, в результаті діставатимемо те саме, тобто, що перший одержав на 1 крб. більше від другого.

3.7. КОНКУРС ВЕСЕЛИХ І ВИНАХІДЛИВИХ

Невід'ємною складовою частиною математичних вечорів у багатьох школах стали математичні «КВВ» — конкурси веселих і винахідливих.

Оргкомітет по проведенню математичного вечора заздалегідь підбирає в команди школярів з різними нахилами (швидка усна лічба, швидке та чітке виконання рисунків, добрий окомір, знання теоретичного матеріалу і вміння застосовувати його в житті, знання історії математики, досягнень математичної науки і т. д.).

Протягом кількох тижнів члени команд відшуковують і ознайомлюються з додатковою літературою, збірниками задач і підручниками, читають різні

молодіжні журнали, проглядають комплекти газет, радяться із своїми старшими товаришами.

Практика показала, що на математичні КВВ треба відводити не більш як 30—35 хв.

Наведемо орієнтовний перелік конкурсів, які можна провести на КВВ.

1. Представлення команд.
2. Конкурс «привітання».
3. Конкурс «розминка».
4. Конкурс «ти – мені, я – тобі».
5. Конкурс вболівальників.
6. Конкурс художників.
7. Конкурс шифрувальників.
8. Гонка за лідером.
9. Заморочки із бачки.
10. Конкурс капітанів.
11. Музичний конкурс.
12. Домашнє завдання та інші.

Пропонуємо питання конкурсу «гонка за лідером».

1. Звичайно місяць закінчується 30-м або 31-м числом. У якому місяці є 28 число? (У кожному).
2. На руках 10 пальців. Скільки пальців на 10 руках? (150).
3. Обчислити $5 + 5 \cdot 5 = ?$ (30).
4. Який птах важить 40 пудів? (Сорокопуд).
5. Двоє хлопчиків грали у шахи 40 хвилин. Скільки хвилин грав кожен з них? (40).
6. По-батькові казкового Дракона...? (Горинич).
7. Горіли 5 свічок. Дві із них потухли. Скільки залишилось? (2).
8. Яке число ділиться на всі числа без остачі? (0).
9. Буква і нота, а разом – столиця ...? (Уфа).
10. Без чого на спортивних змаганнях не обійшовся жоден суддя? (Без очків).

11. Хто із спортсменів не може обійтися без кільця? (*Баскетболіст*).
12. В кожному куточку кімнати сидить котик, навкруги кожного котика сидять ще по три котики. Скільки котиків у кімнаті? (*Чотири*).
13. Логічний доказ це...? (*Аргумент*).
14. На яке питання неможливо відповісти «Так»? («...*Ти спиши?*»).
15. Замінити одним словом: «пекти рака»... (*Червоніти*).
16. Як називається одна з центральних вулиць м. Києва? (*Хрещатик*).
17. Яке місто найсміливіше? (*Сміла*).
18. Що на світі наймиліше? (*Сон*).
19. Що буде з козою, коли їй мине 6 років? (*Піде 7-й*).
20. Яке жіноче ім'я складається з 30-ти букв «Я»? («*Зоя*»).
21. Який кут утворюють велика та мала стрілки годинника о 18.00 годині? (*180 градусів*).
22. Загадка: «Вранці на чотирьох, вдень на двох, а вечором на трьох?». (*Людина*)
23. «Царицею» квітів вважається...? (*Троянда*).
24. Що у світі най шоріше? (*Думка*).
25. Добре відомо, що «5» у квадраті – це «25», а «10» у квадраті – «100», половина у квадраті – «1/4». А чому дорівнює «кут» у квадраті? (*90 градусів*)
26. Які коси неможливо заплести? (*Піщані, річкові, ті, якими косять траву*).

ЛІТЕРАТУРА:

1. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. – К.: Навчальна книга, 2003.
2. Буковська О.І. Математична логіка. 5-9 класи. – Х.: Основа, 2005.
3. Басанько А.М., Романенко А.О. За лаштунками підручника з математики. 5-7 клас. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005.
4. Богданович М. Математичне джерельце. – К.: Веселка, 1988.
5. Коба В.І., Хмура О.О. Позакласна робота з математики в школі. – К.: Радянська школа, 1968.
6. Кордемський Б.А. Математична кмітливість. – К.: Радянська школа, 1958.
7. Конфорович А.Г. Добрий день, Архімеде. – К.: Молодь, 1988.
8. Конфорович А.Г. Математичні софізми і парадокси. – К.: Радянська школа, 1983.
9. Лукавецький В.І., Маланюк М.П. Олімпіади юних математиків. – К.: Радянська школа, 1985.
10. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1971.
11. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1986.

- 12.Глебко Ю. Г. В часы досуга. – К.: Реклама, 1985.
- 13.Гуревич Е. Я. Тайна древнего талисмана. – М.: Наука, 1969.
- 14.Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. – М.: Физматгиз, 1961.
- 15.Еленьский Щ. По следам Пифагора. Занимательная математика. – М.: Детгиз, 1961.

Видання підготовлено до друку та віддруковано
редакційно-видавничим відділом ЧОІПОПП
Зам. № 934 Тираж 100 пр.
18003, Черкаси, вул. Бидгощська, 38/1